Лекция вторая

Квантовая электродинамика

Лекция была прочитана на физическом факультете университета Кентербери (Крайстчерч, Новая Зеландия) 15 сентября 1975 года

Сегодня мне бы хотелось поговорить о некоторых этапах развития квантовой механики. В предыдущей лекции я обрисовал принципиальную структуру квантовой механики. Эта структура включает в себя динамические переменные, которые не коммутируют между собой, поэтому надо задать коммутационные соотношения, чтобы сделать их определенными. Если такие определенные динамические переменные заданы, то дальше понадобится гамильтониан — величина, которая соответствует полной энергии и является функцией динамических переменных.

Зная гамильтониан (который я буду обозначать H), можно перейти к построению гейзенберговых уравнений движения. Для любой динамической переменной u справедливо соотношение

$$i\hbar\, du/dt = uH - Hu, \tag{1}$$

которое дает схему построения гейзенберговых уравнений. Существует и альтернативный, шрёдингеровский, формализм, в котором используется волновая функция, удовлетворяющая волновому уравнению

$$i\hbar\, d\psi/dt = H\psi. \tag{2}$$

Здесь H — тот же гамильтониан, что входит в соотношение (2), но теперь он интерпретируется как оператор, действующий на волновую функцию ψ.

Теперь я хочу перейти к динамической системе, в которую входит много одинаковых частиц. Волновая функция такой системы будет содержать динамические переменные каждой из входящих в нее частиц. Посмотрим сначала, может ли волновая функция быть симметричной по частицам. Ясно, что гамильтониан системы должен быть симметричен по частицам: он представляет собой их полную энергию и просто не содержит ничего такого, что отличало бы одну частицу от другой. Поэтому из (2) следует, что если функция ψ симметрична, то производная $d\psi/dt$ тоже будет симметричной, а для этого надо, чтобы функция ψ всегда оставалась симметричной, если она была симметричной вначале.

Если бы эта ситуация оказалась реальной, то она отразила бы закон Природы (для данных частиц), по которому существуют только симметричные волновые функции. На самом деле такой закон Природы существует, но только для определенного вида частиц, которые называются бозоны.

Эти частицы подчиняются статистике, отличной от классической. Статистику для бозонов разработал Бозе с помощью Эйнштейна.

Оказывается, что легкие кванты, фотоны, должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна, потому что эта статистика приводит к закону Планка для излучения черного тела. Поэтому можно считать, что фотоны являются бозонами.

Волновая функция ψ представляет собой функцию динамических переменных различных частиц

$$\psi(q^a, q^b, q^c, \ldots), \tag{3}$$

где величины q^a относятся к первой частице, q^b — ко второй и т. д.; буквой q обозначены все коммутирующие переменные, необходимые для описания состояния соответствующей частицы. Задав все эти переменные q, мы тем самым зададим точку в области определения волновой функции (3).

Если волновая функция симметрична, то достаточно просто задать переменные q, не интересуясь их порядком. Если бы волновая функция не была симметричной, то такой способ оказался бы непригодным, ибо тогда мы были бы обязаны учитывать, что частицы находятся в разных состояниях. Если же функция ψ симметрична, то это различие становится ненужным, а достаточно просто знать, какие состояния заняты и сколько в каждом из них бозонов.

Таким образом, мы получаем возможность преобразовать ψ к новым переменным:

$$\psi(n^1, n^2, n^3, \ldots), \tag{4}$$

где n^1 — число переменных q, принимающих первое значение (скажем, q^1); n^2 — число переменных q, принимающих второе значение, и т. д. Этими n можно пользоваться как новыми динамическими переменными. Каждое n означает число бозонов в данном состоянии и является динамической переменной, собственные значения которой равны 0, 1, 2, 3 и т. д. (целочисленные собственные значения); причем n коммутируют друг с другом: если мы определим число бозонов в одном состоянии, то это никак не скажется на определении числа бозонов в других состояниях.

Займемся теперь одной из переменных n, собственные значения которой равны целым числам 0, 1, 2, 3 и т. д. Сразу заметна связь между n и энергией гармонического осциллятора. Конечно, гармонический осциллятор обладает набором энергетических уровней, значения которых образуют арифметическую прогрессию, и можно так выбрать числовые коэффициенты, что разности между соседними уровнями энергии будет составлять 1. У гармонического осциллятора есть и нулевой уровень, равный половине кванта энергии. Вычтем эту энергию, тогда останутся уровни 0, 1, 2, 3 и т. д. Они в точности соответствуют собственным значениям одной из переменных n. Это означает, что каждую переменную n можно описать в терминах энергий гармонического осциллятора.

Для описания гармонического осциллятора удобнее всего использовать

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА.

Я расскажу лишь о главных идеях, лежащих в основе этого представления.

Рассмотрим гармонический осциллятор, но в аспектах, отличных от тех, которые интересовали нас в предыдущей задаче, связанной с бозонами. Энергия осциллятора (гамильтониан)

$$H = {}^1/_2\,(p^2 + q^2) - {}^1/_2. \tag{5}$$

В этом выражении уже отсутствует нулевая энергия и для простоты положено $\hbar = 1$, $m = 1$, $\omega = 1$, чтобы избавиться от ненужных числовых коэффициентов. В основном состоянии осциллятор имеет волновую функцию, которую мы обозначим ψ_0:

$$\psi_0 = \exp\,(-q^2/2). \tag{6}$$

Эта функция отвечает нормальному, или невозбужденному, состоянию осциллятора.

Введем теперь переменную

$$\eta = (1/\sqrt{2})\,(p + \mathrm{i}q), \tag{7}$$

которая сама комплексна, p и q действительны. Сопряженная ей величина имеет вид

$$\bar{\eta} \equiv (1/\sqrt{2})\,(p - \mathrm{i}q). \tag{8}$$

Используя (7) и (8), можно с помощью стандартного квантового условия

$$qp - pq = \mathrm{i} \tag{9}$$

($\hbar = 1$) вычислить величину $\bar{\eta}\eta - \eta\bar{\eta}$:

$$\bar{\eta}\eta - \eta\bar{\eta} = {}^1/_2\,(p - \mathrm{i}q)\,(p + \mathrm{i}q) - {}^1/_2\,(p + \mathrm{i}q)\,(p - \mathrm{i}q) =$$
$$= {}^1/_2\,(-2\mathrm{i})\,(qp - pq) = 1. \tag{10}$$

Этот результат означает, что величина $\bar{\eta}$ эквивалентна оператору дифференцирования η, поскольку $(\partial/\partial\eta)\eta f - \eta\,(\partial/\partial\eta) f = f$. Таким образом,

$$\bar{\eta} \equiv \partial/\partial\eta. \tag{11}$$

Представление Фока основано на использовании η и $\bar{\eta}$.

Подействуем теперь на волновую функцию ψ_0 из уравнения (6) оператором $\bar{\eta}$ (8). Поскольку

$$p = -\mathrm{i}\partial/\partial q,$$

имеем

$$\bar{\eta}\psi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(p-\mathrm{i}q)\,\psi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q}-\mathrm{i}q\right)\psi_0=$$
$$=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial q}+q\right)\psi_0=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial q}+q\psi_0\right)=0. \qquad (12)$$

Следовательно, результат действия $\bar{\eta}$ на ψ_0 равен 0.

В качестве следующего примера рассмотрим какую-нибудь функцию η или $\bar{\eta}$, которая может быть записана в виде степенного ряда по этим переменным. Перенеся с помощью коммутационного соотношения (10) все $\bar{\eta}$ в правую часть и подействовав функцией f на ψ_0, получим с учетом (12), что на ψ_0 действует некоторая функция g, зависящая только от η:

$$f(\eta,\ \bar{\eta})\,\psi_0=g(\eta)\,\psi_0. \qquad (13)$$

Следовательно, остаются только независимые волновые функции

$$\psi_0,\ \eta\psi_0,\ \eta^2\psi_0,\ \eta^3\psi_0 \qquad (14)$$

и т. д.

Ясно также, что энергия H (см. (5)) имеет простой вид *)

$$H=\eta\bar{\eta}. \qquad (15)$$

Если теперь подействовать на функцию $\eta^r\psi_0$ оператором H, то с учетом коммутационного соотношения (10) получим

$$H\eta^r\psi_0=(\eta\bar{\eta})\,\eta^r\psi_0=\eta\,(1+\eta\bar{\eta})\,\eta^{r-1}\psi_0=$$
$$=\eta^r\psi_0+\eta^r(1+\eta\bar{\eta})\,\eta^{r-2}\psi_0=\ldots=r\eta^r\psi_0+\eta^{r+1}\bar{\eta}\psi_0.$$

Приняв во внимание (12), найдем

$$H\eta^r\psi_0=r\eta^r\psi_0. \qquad (16)$$

Это значит, что состояние $\eta^r\psi_0$ является стационарным состоянием осциллятора, энергия которого (исключая энергию основного состояния, равную половине кванта энергии) составляет как раз r квантов энергии. Можете, если вам нравится, называть ψ_0 (см. (14)) невозбужденным состоянием, $\eta\psi_0$ — первым возбужденным состоянием, $\eta^2\psi_0$ — вторым возбужденным состоянием, $\ldots\eta^r\psi_0$ — r-м возбужденным состоянием ..., и тогда различные возбужденные состояния можно будет представить в очень простом виде.

Представление Фока особенно полезно для бозонов. Поставим в соответствие каждому бозонному состоянию состояние осциллятора. Заметьте: не по осциллятору для каждого бозона — это было бы совершенно неправильно. В бозонном состоянии могло бы находиться n бозонов, и мы бы тогда поставили им в соответствие осциллятор (отвечающий данному бозонному состоянию) в n-м возбужденном состоянии. По такой схеме любое состояние ансамбля

*) В самом деле, $\eta\bar{\eta}={}^1/_2(p+\mathrm{i}q)(p-\mathrm{i}q)={}^1/_2(p^2+q^2)+(\mathrm{i}/2)(qp-pq)={}^1/_2(p^2+q^2)-{}^1/_2=H$.— *Примеч. редактора английского издания.*

бозонов можно связать с каким-нибудь состоянием осциллятора. Число бозонов в любом бозонном состоянии равно степени возбуждения соответствующего осциллятора.

Это совершенно замечательный факт; он позволяет «примирить» волновую и корпускулярную теории света. Рассматривая свет с точки зрения корпускулярной теории, мы имеет дело с фотонами, которые представляют собой бозоны: для них надо использовать общую теорию бозонов. Если рассматривать свет как волну, то разные фурье-компоненты волн окажутся гармоническими осцилляторами, которые надо использовать в фоковском представлении. Теперь нам ясна связь между этими двумя подходами. Мы видели, что ансамбль бозонов и набор осцилляторов — это просто два способа математического описания одной и той же физической реальности. Можно рассматривать электромагнитное поле или как ансамбль фотонов, или как набор электромагнитных волн.

В фоковском подходе появляются переменные η и $\bar{\eta}$. Они имеют простой физический смысл. Оператор η увеличивает степень возбуждения на один квант, а оператор $\bar{\eta}$ на один квант ее уменьшает. Теперь становится понятным уравнение (12) $\bar{\eta}\psi_0=0$, ибо если попытаться уменьшить на один квант степень возбуждения невозбужденного состояния, т. е. ψ_0, то мы получим нуль. Физически это совершенно очевидно.

Теперь у нас есть математическое описание электромагнитного поля в терминах операторов уменьшения или увеличения степени возбуждения компоненты поля на один квант. Эти операторы можно также описывать как операторы испускания и поглощения бозона. Все η являются операторами рождения, увеличивающими степень возбуждения на единицу, а все $\bar{\eta}$ представляют собой операторы поглощения (или уничтожения), которые уменьшают степень возбуждения на единицу:

$$\text{операторы} \begin{cases} \eta \to \text{рождение;} \\ \bar{\eta} \to \text{поглощение.} \end{cases} \qquad (17)$$

Для каждого бозонного состояния существует пара переменных η^a и $\bar{\eta}^a$. Коммутационные соотношения для них заключаются в следующем:

1) переменные, соответствующие разным бозонным состояниям коммутируют друг с другом, т. е. коммутируют все операторы рождения:

$$\eta^a\eta^b-\eta^b\eta^a=0 \qquad (18)$$

и все операторы поглощения:

$$\bar{\eta}^a\bar{\eta}^b-\bar{\eta}^b\bar{\eta}^a=0; \qquad (19)$$

2) выражение $\bar{\eta}^a\eta^b-\eta^b\bar{\eta}^a$ обращается в нуль, когда a и b различны, и равно единице, когда a и b равны между собой:

$$\bar{\eta}^a\eta^b-\eta^b\bar{\eta}^a=\delta^{ab}, \qquad (20)$$

где δ^{ab} — символ Кронекера. Если мы имеем дело с электромагнитным полем или с любым ансамблем бозонов, то для описания квантовомеханической системы нам нужны переменные η и $\bar{\eta}$, которые удовлетворяют приведенным выше коммутационным соотношениям.

До сих пор я все время говорил об ансамбле бозонов. С тем же успехом может существовать ансамбль совершенно одинаковых частиц, полная волновая функция которых не симметрична, а антисимметрична. Пусть ψ в формуле (2) означает такую антисимметричную функцию. Если функция ψ с самого начала была антисимметричной, то она останется антисимметричной. Антисимметричная волновая функция ψ отвечает новому виду частиц, которые называются

ФЕРМИОНЫ.

Фермионы характеризуются тем, что два из них не могут находиться в одном и том же состоянии. Если функция ψ антисимметрична (ср. с видом функции (3)), то никакие две из переменных q не должны быть равны между собой, ибо в противном случае мы придем к нулю. Свойством фермионов, не позволяющим никаким двум из них занимать одно и то же состояние (принцип исключения, или принцип Паули), обладают электроны, а также некоторые другие элементарные частицы, существующие в Природе.

Теория фермионов аналогична предшествующей ей теории бозонов с той лишь разницей, что возникающие в этой теории фермионные переменные никак не связаны с гармоническими осцилляторами. Тем не менее и для фермионов можно ввести операторы η и $\bar{\eta}$, которые описывают рождение и поглощение фермиона подобно тому, как раньше операторы η и $\bar{\eta}$ описывали рождение и поглощение бозона.

У меня нет времени для подробного изложения теории фермионов. Приведу лишь ее результаты. Как и прежде, каждый отдельный оператор η и $\bar{\eta}$ соответствует фермионному состоянию. Но теперь операторы η и $\bar{\eta}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям, отличающимся от бозонных:

$$\eta^a\eta^b + \eta^b\eta^a = 0, \tag{21}$$

$$\bar{\eta}^a\bar{\eta}^b + \bar{\eta}^b\bar{\eta}^a = 0 \tag{22}$$

и

$$\bar{\eta}^a\eta^b + \eta^b\bar{\eta}^a = \delta^{ab}. \tag{23}$$

Уравнения (21)—(23) того же вида, что (18)—(20) соответственно, только знак минус везде заменен знаком плюс.

Я считаю, что это совершенно удивительный математический факт. Неизвестно, что за ним кроется на самом деле, потому что мы имеем дело с двумя совершенно разными физическими ситуациями. Уравнения (18)—(20) относятся к частицам, любое число которых может находиться в любом состоянии. Уравнения (21)—(23) соответствуют частицам, никакие две из которых не могут находиться в одном и том же состоянии. Физически эти два случая очень сильно различаются, однако, несмотря на это, между соответствующими им уравнениями существует тесная параллель.

Положим в уравнении (21) $b=a$. Тогда

$$(\eta^a)^2=0 \tag{24}$$

(суммирование по индексу a отсутствует). Этот результат означает, что два фермиона не могут испускаться в одно и то же состояние. Попытавшись осуществить такой переход, мы просто получим, что волновая функция равна нулю. В случае бозонов уравнение (24) не даст ничего похожего, потому что, положив в (18) $b=a$, мы придем к тождеству $(\eta^a)^2=(\eta^a)^2$.

Число частиц в любом состоянии для обоих случаев, т. е. и для бозонов, и для фермионов, дается оператором

$$n^a=\eta^a\bar{\eta}^a \tag{25}$$

(без суммирования по индексу a). Для бозонов, когда η^a, $\bar{\eta}^a$ удовлетворяют условиям (18)—(20), собственные значения этого оператора равны 0, 1, 2, 3 и т. д. Для фермионов, когда выполняются условия (21)—(23), собственные значения оператора n^a равны либо нулю, либо единице. Таким образом, число фермионов в любом состоянии равно либо нулю, если состояние не занято, либо единице, если состояние занято. В последнем случае состояние заполнено до предела, так что ни один фермион уже не может в него попасть.

Мы познакомились с основными динамическими переменными, которые используются в любой квантовой теории поля. Следует, правда, сделать одно формальное обобщение. До сих пор мы считали, что различные состояния (как для бозонов, так и для фермионов) дискретны. Однако на самом деле это не так. Различные состояния частицы надо рассматривать как собственные состояния ее импульса. Тогда индекс a, обозначающий конкретное состояние, заменяется тремя компонентами импульса частицы и значением ее спина (если у частицы есть спин). В результате всех этих действий символ Кронекера δ^{ab} в уравнениях (20) и (23) приходится заменять произведением

$$\delta(p_1'-p_1'')\,\delta(p_2'-p_2'')\,\delta(p_3'-p_3'') \tag{26}$$

(в отсутствие спина), где p_1', p_2', p_3' и p_1'', p_2'', p_3'' представляют собой компоненты импульса двух состояний. Описанная процедура является всего лишь формальным обобщением, которое всегда необходимо делать при переходе от дискретных квантовых состояний к непрерывному спектру. Но это дает ответ на вопрос, поставленный в первой части нашей задачи: в терминах каких динамических переменных надо формулировать квантовую теорию поля?

Теперь следует найти вид гамильтониана. Гамильтониан представляет собой полную энергию системы и должен быть выбран так, чтобы для системы получались правильные уравнения движения. Я покажу, как это делается, на примере свободного поля излучения.

Рассмотрим электромагнитное поле и будем считать, что заряды отсутствуют, т. е. что мы имеем дело с полем фотонов. Тогда динамическими переменными могут служить векторы электрического и магнитного полей. Динамические переменные во всех точках пространства должны задаваться в один и тот же момент времени. Например, вектор электрического поля берется в произвольной точке (x_1, x_2, x_3) трехмерного пространства в определенный момент времени t:

$$\mathscr{E}_r(x_1, x_2, x_3; t), \quad r=1, 2, 3. \tag{27}$$

Аналогично задается вектор магнитного поля $\mathscr{H}$ для того же момента времени t:

$$\mathscr{H}_r(x_1, x_2, x_3; t), \quad r=1, 2, 3. \tag{28}$$

Вот те динамические переменные, которые нужны для описания свободного электромагнитного поля.

Вы, наверное, заметили, что мы несколько отошли от четырехмерной симметрии, которую хотели бы видеть в релятивистской теории. Это неизбежно случается при переходе к гамильтонову формализму: приходится отходить от четырехмерной симметрии, и тут ничего не поделаешь, потому что все динамические переменные заданы в определенный момент времени.

Гамильтониан равен полной энергии: мы берем его в том же виде, что и в классической теории:

$$H=\frac{1}{8\pi}\int[\mathscr{E}^2(x_1, x_2, x_3)+\mathscr{H}^2(x_1, x_2, x_3)]\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{29}$$

Уравнения движения для переменных $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ известны из теории Максвелла:

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}=\operatorname{rot}\mathscr{H}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}=-\operatorname{rot}\mathscr{E}. \tag{31}$$

Есть еще уравнения:

$$\operatorname{div}\mathscr{E}=0, \tag{32}$$

$$\operatorname{div}\mathscr{H}=0, \tag{33}$$

представляющие собой ограничения, которые надо наложить на переменные $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$.

Уравнения (30) и (31) показывают, как величины $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ изменяются со временем в квантовой теории. Они должны соответствовать гейзенберговым уравнениям движения. Значит, в квантовой теории должны выполняться равенства

$$i\hbar\operatorname{rot}\mathscr{H}=\mathscr{E}H-H\mathscr{E} \tag{34}$$

и

$$i\hbar\operatorname{rot}\mathscr{E}=H\mathscr{H}-\mathscr{H}H. \tag{35}$$

Из гейзенберговых уравнений движения можно сделать вывод о том, каковы коммутационные соотношения между величинами $\mathscr{E}$

и $\mathscr{H}$. Коммутационные соотношения должны иметь такой вид, чтобы взяв в качестве гамильтониана выражение (29), мы получили уравнения (30) и (31). Эта задача поставлена четко, и ее нетрудно решить.

В результате получается, что различные компоненты $\mathscr{E}$ коммутируют друг с другом во всем пространстве, то же относится и к различным компонентам $\mathscr{H}$. Компонента $\mathscr{E}$ не коммутирует с перпендикулярной ей компонентой $\mathscr{H}$, если две точки, принадлежащие полям $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$, расположены очень близко друг от друга. В коммутатор входит производная δ-функции. Типичное соотношение имеет вид

$$[\mathscr{E}_1(x_1', x_2', x_3'), \quad \mathscr{H}_2(x_1'', x_2'', x_3'')]_- = \\ = \delta(x_1'-x_1'')\,\delta(x_2'-x_2'')\,\frac{\partial}{\partial x_3'}\,\delta(x_3'-x_3'').$$

В любом случае коммутатор, составленный из какой-нибудь компоненты $\mathscr{E}_r$ и какой-нибудь компоненты $\mathscr{H}_s$, просто равен числу.

Можно опять ввести переменные η и η, отвечающие рождению и поглощению фотона. Так мы придем к удовлетворительной квантовой теории для свободного электромагнитного поля.

То же самое можно сделать и для ансамбля электронов, а затем ввести взаимодействие электронов с электромагнитным полем. Для этого сначала запишем гамильтониан, который описывает энергию одних электронов, потом прибавим к нему гамильтониан электромагнитного поля и, наконец, учтем взаимодействие, прибавив еще несколько членов так, чтобы получились правильные уравнения движения. В результате мы увидим, что для ансамбля электронов и сопровождающих их позитронов, взаимодействующих с электромагнитным полем, можно построить совершенно определенный гамильтониан, который будет описывать полную энергию динамической системы.

Таким образом, гамильтониан представляет собой сумму членов, которые описывают энергии свободных частиц, и членов, соответствующих энергии взаимодействия:

$$H_{\text{поля}} = H_{\text{част}} + H_{\text{взаим}}. \qquad (36)$$

Обычно для такого гамильтониана пользуются теорией возмущений. Ту часть, которая описывает взаимодействия, считают ответственной за переходы, а именно за переходы, в которых рождаются одни частицы и поглощаются другие.

В каждом из переходов импульс сохраняется, а энергия не сохраняется. Вас может удивить такое различие в поведении энергии и импульса. Оно возникает из-за того, что под энергией мы подразумеваем ее значение в определенный момент времени. Гамильтониан H в (36) берется только для одного момента времени, но в него входит интеграл по всему трехмерному пространству. Когда мы говорим об определенном моменте времени, точно определить энергию невозможно. Потому-то она и не должна сохраняться во время переходов.

Продолжая рассказ о квантовой электродинамике, я бы хотел остановиться еще на одном очень изящном и ясном выводе теории. Прежде всего, запишем гамильтониан не через компоненты вектора электромагнитного поля $\mathcal{E}_r$ и $\mathcal{H}_r$, как мы это делали до сих пор, а через компоненты четырехмерного потенциала A_μ, где $\mu=0$, 1, 2, 3. Гамильтониан (29) отвечает энергии свободного поля, в котором есть только поперечные электромагнитные волны. До тех пор, пока мы имеем дело только с поперечными волнами, мы не можем учесть кулоновское взаимодействие между частицами. Для того чтобы учесть его, необходимо ввести продольные электромагнитные волны и соответственно записать A_μ.

Продольные волны можно исключить с помощью математического преобразования. Они почти не связаны с экспериментом, поэтому хотелось бы от них избавиться. В результате вместо старых операторов η и $\bar{\eta}$ для рождения и поглощения электронов появятся новые переменные, которые имеют очень простой физический смысл. Каждая новая переменная η соответствует рождению не «голого» электрона, а электрона вместе с окружающим его кулоновским полем. Возникает новый вариант теории, в которой учитывается, что электрон всегда сопровождает окружающее его кулоновское поле. Всякий раз при рождении электрона одновременно рождается и окружающее его кулоновское поле, образуя своего рода «одежду» электрона. Аналогично, при поглощении электрона одновременно поглощается и его кулоновское поле.

То, о чем я говорил, нетрудно понять физически, но все это представляет собой очень серьезное отклонение от теории относительности, ибо если электрон движется, то кулоновское поле вокруг него не может быть сферически-симметричным, но именно сферически-симметричное кулоновское поле и должно рождаться вместе с электроном.

После того как мы сделаем преобразование, в результате которого будут исключены продольные электромагнитные волны, в гамильтониане появится новый член. Этим новым членом как раз окажется кулоновская энергия взаимодействия всех заряженных частиц:

$$\sum_{(1,2)} \frac{e_1 e_2}{r_{12}}. \qquad (37)$$

Суммирование проводится по всем парам частиц, которые существуют в рассматриваемом состоянии системы. Член (37) «автоматически» возникает при преобразовании, устраняющем продольные волны.

Вы видите, что в этой части квантовой электродинамики все обстоит вполне благополучно. Из-за недостатка времени мне удалось лишь вкратце обрисовать ситуацию, но вы сами можете дополнить ее недостающими деталями и убедиться, что теория правильно описывает физическую картину. Однако нам еще предстоит столкнуться с трудностями, когда мы перейдем к решению уравнений.

Чтобы решить уравнения, будем исходить из уравнения Шрёдингера (2). Естественно искать решение по теории возмущений, в которой всякое взаимодействие рассматривается как возмущение.

Решая уравнение по этой схеме, необходимо задать какое-нибудь начальное состояние. Тогда поправки первого порядка вычисляются хорошо, но попытки вычислить поправки второго порядка приводят к интегралам, которые оказываются бесконечными. Какое бы начальное состояние ни было выбрано, в процессе решения всегда возникают бесконечные интегралы.

Это вызывает понятную тревогу, и мне кажется, что правильный вывод состоит в том, что уравнение Шрёдингера (2) не имеет решений. Во всяком случае, никому не удалось найти решение, несмотря на то, что уравнение изучалось десятилетиями. Так что, я думаю, оно просто не имеет решений.

Рассмотрим очень простой случай: пусть в начальном состоянии нет ни электронов, ни позитронов, ни фотонов, т. е. нет вообще никаких частиц. Воспользовавшись теорией возмущений, мы увидим, что, начав с состояния, в котором нет частиц, мы тем не менее придем к состоянию, в котором возникнут частицы. Дело в том, что гамильтониан, входящий в уравнение (2), содержит члены, которые отвечают одновременному рождению электрона, позитрона и фотона. Эти три частицы рождаются одновременно, не нарушая закон сохранения импульса, но нарушая закон сохранения энергии. В результате конечное состояние перестанет быть состоянием без частиц. Частицы рождаются в первом приближении (в первом порядке теории возмущений). А потом, при переходе ко второму приближению, получаются бесконечности. Следовательно, уравнение (2) не решается даже для очень простого случая.

Напрашивается вывод, что то место, где отсутствуют частицы, и есть вакуум. Однако это не так, потому что вакуум должен соответствовать стационарному состоянию, в котором должно присутствовать очень много частиц, отвечающих какому-нибудь стационарному решению уравнения Шрёдингера. Но решения этого уравнения Шрёдингера неизвестны — нет даже решения, которое можно было бы отнести к вакууму.

Может показаться, что результаты очень нелепы и что в такой теории вообще ничего нельзя добиться. Однако все не так уж плохо, потому что с точки зрения экспериментатора расчеты, связанные с вакуумом, не нужны.

Экспериментатор не в состоянии дать нам информацию, которую мы могли бы сравнить со своими расчетами для вакуума. Экспериментатор занимается лишь отклонениями от вакуума.

Чтобы «избавиться» от вакуума, можно взять волновую функцию вакуума (скажем, ψ^{vac}) и подействовать на неё оператором рождения электрона

$$\eta^{(e)}\,\psi^{\mathrm{vac}}. \qquad (38)$$

Нам не известно, как уже говорилось, что такое ψ^{vac}, но для оператора рождения электрона $\eta^{(e)}$ можно воспользоваться гейзенберговыми уравнениями движения. Тогда мы выясним, как (38) меняется со временем.

При этих условиях преодоление описанных выше трудностей кажется безнадежным делом, но тем не менее, решая гейзенберговы уравнения во втором приближении, мы все же приходим к бесконечности. Эту бесконечность можно интерпретировать как дополнительную собственную энергию электрона, которая оказывается бесконечной величиной. Так возникает идея перенормировки (массы). Итак,

ПЕРЕНОРМИРОВКА.

Мы могли бы сказать, что масса электрона, введенная в уравнения с самого начала, не то же самое, что наблюдаемая масса. Тогда при учете взаимодействия электрона с электромагнитным полем значение массы заменится другим, отличным от того массового параметра, который входит сначала в уравнения движения.

Такая физическая идея была бы разумной при условии, что изменение массы или невелико, или (если оно велико) хотя бы конечно. Однако этой идее совсем не просто приписать какой-нибудь смысл, когда изменение массы бесконечно. Тем не менее известно, что бесконечность, возникающая при решении уравнений, имеет то же происхождение, что и бесконечность, связанная с бесконечной перенормировкой массы.

Можно сказать несколько точнее, а именно, что бесконечности, о которых мы говорим, имеют вид

$$\int_0^\infty d\nu, \tag{39}$$

где ν — частота испущенного фотона, если в гамильтониане учитывается тот член ряда теории возмущений, который отвечает за рождение электрон-позитронной пары и фотона. Интеграл (39) обращается в бесконечность, если частота фотона может принимать все значения от нуля до бесконечности. Можно проследить аналогию между этой бесконечностью и бесконечной массой покоя электрона в классической теории Лоренца для точечного электрона, окруженного кулоновским полем. Кулоновское поле вносит энергию, и если эту энергию проинтегрировать, считая электрон сосредоточенным в точке зарядом, то получим бесконечность, которая имеет то же происхождение, что и бесконечность в (39).

Ситуация несколько изменится, если мы обратимся к полной электронной теории, т. е. к теории электрона и позитрона, возникающего как дырка в море электронов, обладающих отрицательной энергией. Тогда мы придем к бесконечности иного рода. Вместо интеграла (39) появится величина, пропорциональная выражению

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu}, \tag{40}$$

которое логарифмически возрастает при больших ν:

$$\sim (\ln \nu)_{\nu \to \infty}. \qquad (41)$$

Формула (41) означает, что в полной электронной теории стремление к бесконечности несколько «сглаживается».

Физически это можно объяснить следующим образом. Из-за присутствия заряда вакуум вокруг него поляризуется, потому что заряд стремится создать в вакууме электронные пары. Это, в свою очередь, до какой-то степени компенсирует кулоновское поле первоначального электрона. Именно из-за (частичной) компенсации бесконечность в (40) сглаживается по сравнению с бесконечностью в (39), но тем не менее она остается бесконечностью.

Несмотря на перечисленные трудности, физики упорно продолжали расчеты по этой модели. Они выяснили, как внешние электрические или магнитные поля изменяют энергию электрона, связанного с оператором рождения $\eta^{(e)}$. Оказалось, что любое из этих полей вносит небольшую поправку в энергию электрона (бесконечный член, разумеется, следует вычесть). Эта поправка интерпретируется как член, отвечающий за лэмбовский сдвиг уровней атома водорода или же за дополнительный магнитный момент электрона, т. е. за аномальный магнитный момент, возникающий у электрона в магнитном поле. Результаты таких вычислений согласуются с опытом.

Таким образом, большинство физиков совершенно удовлетворены сложившейся ситуацией. Они считают, что квантовая электродинамика стала вполне совершенной теорией и о ней нечего больше беспокоиться. Должен сказать, что мне это в высшей степени не нравится, потому что в такой «совершенной» теории приходится пренебрегать возникающими в уравнениях бесконечностями, причем пренебрегать совершенно безосновательно. Это просто бессмысленно математически. В математике величину отбрасывают только в том случае, если она оказывается очень малой, а не из-за того, что она бесконечно велика и от нее хотят избавиться!

Расчеты лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента электрона приобретут осмысленный вид, если ввести обрезание интегралов, предположив, что верхним пределом интегрирования является не бесконечность, а какая-нибудь конечная величина. Тогда взаимодействие между электроном и электромагнитным полем обрезается для частот, превышающих некое предельное значение ν_{max}. Частоту, при которой производится обрезание, разумно взять такой, чтобы ей отвечала энергия порядка, скажем, тысячи миллионов электрон-вольт.

Благодаря введению логарифмической функции (41) результаты, полученные с помощью соответствующего выражения

$$\int_0^{\nu_{max}} \frac{d\nu}{\nu} \sim \ln \nu_{max},$$

в котором уже содержится обрезание, не будут сильно отличаться от прежних результатов. И лэмбовский сдвиг, и аномальный момент в первом порядке останутся прежними. Таким образом, возникает теория, в которой устранены бесконечности, но при этом совершаются лишь осмысленные математические действия.

Неудачным результатом обрезания будет, конечно, релятивистская неинвариантность теории, ибо если производится какое-то обрезание, т. е. считается, что частота ν не должна превышать некоторого значения, то тем самым вносится нерелятивистское условие, а значит, нарушается релятивистская инвариантность теории. Следовательно, квантовую электродинамику можно уложить в рамки разумной математической теории, но лишь ценой нарушения релятивистской инвариантности. Мне, однако, это кажется меньшим злом, чем отступление от стандартных правил математики и пренебрежение бесконечными величинами.

С большинством физиков я сейчас не согласен именно в этом вопросе. Я не могу допустить отклонения от стандартных правил математики. Правильный вывод состоит в том, что основные уравнения неверны. Их нужно очень существенно изменить, с тем чтобы в теории вообще не возникали бесконечности и чтобы уравнения решались точно, по обычным правилам, без всяких трудностей. Это условие потребует каких-то очень серьезных изменений: небольшие изменения ничего не дадут из-за того, что гейзенберговские уравнения очень хорошо описывают движение частиц в современной теории. Необходимые изменения представляются мне почти столь же значительными, сколь радикален был переход от боровской теории к квантовой механике.