Релятивистское волновое уравнение без отрицательных энергий

Лекция была прочитана на кафедре теоретической физики университета Нового Южного Уэльса (Кенсингтон, Сидней, Австралия) 26 августа 1975 года

Сегодня мне бы хотелось рассказать об одном интересном направлении в развитии релятивистской квантовой механики, а именно, о новом релятивистском волновом уравнении. Я расскажу о некоторых основных характеристиках этого уравнения и о природе его решений. Новое волновое уравнение является релятивистским и описывает частицы, масса которых отлична от нуля. Оно обнаруживает формальное сходство с обычным релятивистским волновым уравнением для частиц со спиновым угловым моментом, равным половине кванта. Но это лишь видимое сходство: частицы, подчиняющиеся новому уравнению (если только они существуют), должны иметь совершенно иные характеристики, чем частицы со спином 1/2 (например, электроны, протоны и т. д.), которые описываются первоначальным уравнением.

Вспомним первоначальное уравнение. Будем рассматривать частицы с массой покоя, отличной от нуля, и для простоты выберем систему единиц, в которой

$$\hbar = m = c = 1, \tag{1}$$

где $\hbar$ и c имеют обычный смысл. В такой системе первоначальное волновое уравнение запишется в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha_r \frac{\partial}{\partial x_r} + i\alpha_m\right\}\psi = 0. \tag{2}$$

Здесь используется общепринятое обозначение суммирования, т. е. $\alpha_r\partial/\partial x_r$ означает сумму $\alpha_1\partial/\partial x_1 + \alpha_2\partial/\partial x_2 + \alpha_3\partial/\partial x_3$, так как индекс r в данном случае пробегает значения 1, 2, 3. Буквами x_0, x_1, x_2 и x_3 обозначены соответственно четыре пространственно-временные координаты частицы t, x, y и z. Коэффициенты α_r ($r=1, 2, 3$) и α_m представляют собой матрицы размера 4×4, выбранные так, чтобы все они коммутировали друг с другом и чтобы квадрат каждой из них был равен единичной матрице размера 4×4. Это означает, что

$$[\alpha_r, \alpha_s] = \alpha_r\alpha_s + \alpha_s\alpha_r = 0 \tag{3}$$

для $r \neq s$ и $r, s = 1, 2, 3$;

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_m^2 = 1 \tag{4}$$

и

$$[\alpha_r, \alpha_m]_+ = 0. \tag{5}$$

Входящая в (2) величина ψ является четырехстрочной матрицей, состоящей из одного столбца, каждый из элементов которого зависит от координат x_0, x_1, x_2, x_3. Функция ψ играет здесь ту же роль, что и обычная однокомпонентная волновая функция в стандартном уравнении Шрёдингера. С помощью уравнения (2) удалось релятивистски-инвариантным образом описать частицы со спином 1/2, такие, например, как электроны.

При выводе нового уравнения мы предполагаем, что частица не бесструктурна, как в случае частиц со спином 1/2, подчиняющихся уравнению (2), а обладает какой-то динамической структурой; это означает, что у нее есть внутренние степени свободы *).

Пусть новые степени свободы соответствуют неким динамическим переменным q_1, p_1 и q_2, p_2, которые описывают два независимых гармонических осциллятора. Эти динамические переменные связаны между собой коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} q_1q_2-q_2q_1 &\equiv [q_1,\ q_2]_- = [p_1,\ p_2]_- = 0, \\ [q_1,\ p_1]_- &= [q_2,\ p_2]_- = \mathrm{i}, \\ [q_1,\ p_2]_- &= [q_2,\ p_1]_- = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Выражения (6) можно записать в чрезвычайно удобном виде, если ввести определение

$$q_3 \equiv p_1, \quad q_4 \equiv p_2 \tag{7}$$

и построить матрицу β размера 4×4, такую, что

$$q_aq_b-q_bq_a \equiv [q_a,\ q_b]_- = \mathrm{i}\beta_{ab}, \tag{8}$$

где

$$a,\ b=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{9}$$

С учетом соотношений (7) и определения (8) матрица β должна иметь вид

$$\beta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Матрица β полностью антисимметрична, а ее квадрат равен единичной матрице, взятой с отрицательным знаком:

$$\beta_{ab}=-\beta_{ba}, \quad \beta^2=-1. \tag{11}$$

Введенному нами требованию о том, чтобы новым степеням свободы соответствовали динамические переменные двух независимых

*) Профессор Дирак в своей известной книге «Принципы квантовой механики» отмечает, что в случае уравнения (2) матрицы α_r и α_m «описывают некоторые новые степени свободы, относящиеся к какому-то внутреннему движению», и делает заключение о том, что «они позволяют ввести спин» частицы. Этот вывод следует из того, что матрицы α_r и α_m не зависят от координат x_0, x_r, «так что они коммутируют» с импульсами и координатами.— *Примеч. редактора английского издания.*

гармонических осцилляторов, можно придать более строгий вид. Волновая функция частицы ψ в дополнение к тому, что она является функцией координат x_0, x_1, x_2, x_3 этой частицы, должна еще зависеть от двух независимых, т. е. коммутирующих, переменных q_a ($a=1$, 2, 3, 4). Существуют следующие пары коммутирующих переменных q_a:

$$(q_1, q_2), (q_3, q_4), (q_1, q_4) \text{ и } (q_2, q_3).$$

Выберем одну из этих пар, скажем (q_1, q_2), и потребуем, чтобы волновая функция характеризовалась следующей функциональной зависимостью:

$$\psi=\psi(x_0, x_1, x_2, x_3; q_1, q_2). \tag{12}$$

Из q_a и волновой функции ψ можно построить четырехстрочную матрицу-столбец

$$q\psi\equiv\begin{pmatrix} q_1\psi \\ q_2\psi \\ q_3\psi \\ q_4\psi \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$q\equiv\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

С помощью тех же рассуждений, которые использовались при выводе уравнения (2), новое уравнение можно записать в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_0}+\alpha_r\frac{\partial}{\partial x_r}+\beta\right\}q\psi=0, \tag{15}$$

где коэффициенты α_r ($r=1$, 2, 3) опять представляют собой матрицы размера 4×4, выбранные так, чтобы они коммутировали друг с другом и с матрицей β:

$$\begin{gathered}[\alpha_r, \alpha_s]_+=0, \qquad r\neq s; \\ [\alpha_r, \beta]_+=0.\end{gathered} \tag{16}$$

В наших обозначениях $[a, b]_+=ab+ba$. Кроме того, мы требуем, чтобы квадрат каждой матрицы α_r был равен единичной матрице

$$\alpha_1^2=\alpha_2^2=\alpha_3^2=1. \tag{17}$$

Матрица β в новом уравнении (15) — та же самая матрица, что и β в уравнении (10). Мы получили тесную связь между матрицами и новыми степенями свободы (см. уравнение (8)). По своему виду новое уравнение (15) явно очень похоже на старое уравнение (2). Все различия между ними вызваны тем, что новое уравнение связано с новыми степенями свободы. Из-за этого $q\psi$ существенно отличается от функции ψ, входящей в уравнение (2). Матрица β тоже непосредственно связана с коммутационными соотношениями между переменными, которые определяют новые степени свободы.

Наложим теперь на матрицы α дополнительные ограничения, которые нам будут полезны в дальнейшем. Предположим, что матрицы α действительны и симметричны (а следовательно, эрмитовы). Конечно, существует немало способов удовлетворить этим требованиям в дополнение к условиям (16) и (17). Возьмем для примера следующий набор матриц α_r:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Подставив этот набор в уравнение (15) и заметив, что

$$\alpha_1 q=\begin{pmatrix}-q_3\\q_4\\q_1\\q_2\end{pmatrix},\quad \alpha_2 q=\begin{pmatrix}q_4\\q_3\\q_2\\q_1\end{pmatrix},\quad \alpha_3 q=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\-q_3\\-q_4\end{pmatrix},\quad \beta q=\begin{pmatrix}q_3\\q_4\\-q_1\\-q_2\end{pmatrix}, \tag{19}$$

получим следующую систему из четырех уравнений:

$$\{(\partial^0+\partial^3)q_1-\partial^1 q_3+\partial^2 q_4+q_3\}\,\psi=0, \tag{20а}$$
$$\{(\partial^0+\partial^3)q_2+\partial^1 q_4+\partial^2 q_3+q_4\}\,\psi=0, \tag{20б}$$
$$\{(\partial^0-\partial^3)q_3-\partial^1 q_1+\partial^2 q_2-q_1\}\,\psi=0, \tag{20в}$$
$$\{(\partial^0-\partial^3)q_4+\partial^1 q_2+\partial^2 q_1-q_2\}\,\psi=0, \tag{20г}$$

в которой использовано обозначение

$$\partial^\mu=\partial/\partial x_\mu,\qquad \mu=0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{21}$$

В представлении, которым мы пользуемся для двух осцилляторов, $q_1\psi$ и $q_2\psi$ интерпретируются как числа, полученные умножением ψ на числа q_1 и q_2, а $q_3\psi$ и $q_4\psi$ имеют вид

$$q_3\psi=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\right)\psi;\qquad q_4\psi=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\psi.$$

Как явствует из системы (20), уравнение (15) на самом деле представляет собой четыре уравнения для одной и той же функции ψ. Следовательно, для одного неизвестного у нас есть целых четыре уравнения. Тогда встает вопрос об их совместности. Прежде всего, не все четыре уравнения независимы. Это становится очевидным, если записать сумму: q_2, умноженное на (20а), плюс $-q_1$, умноженное на (20б), плюс $-q_4$, умноженное на (20в), плюс q_3, умноженное на (20г). Тогда, учитывая коммутационные соотношения (8) и независимость переменных q_a от координат x_μ, получаем, что левая часть этой суммы обращается в нуль, т. е. приходим к тождеству 0=0. Следовательно, в системе (20) только три уравнения могут быть независимыми. Теперь важно проверить внутреннюю непротиворечивость этих трех уравнений.

Запишем уравнения (20) в виде

$$P_a\psi=0,\qquad a=1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{22}$$

где P — четырехстрочная матрица-столбец:

$$P \equiv (\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta) q; \tag{23}$$

элементы столбца имеют вид

$$P_a = (\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta)_{ab} q_b. \tag{24}$$

Тогда условие непротиворечивости записывается в очень простой форме

$$[P_a, P_b]_- \psi = 0, \qquad a, b = 1, 2, 3, 4. \tag{25}$$

Это соотношение должно удовлетворяться, если $P_a\psi = 0$ и $P_b\psi = 0$, т. е. если одна и та же функция ψ удовлетворяет всем уравнениям (20). Воспользовавшись соотношениями (8), симметрией α_r и антисимметрией β, а также соотношениями (16), (17) и (11), можно записать

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b]_- &= [(\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta)_{ac} q_c, \ (\partial^0 + \alpha_s \partial^s + \beta)_{bd} q_d]_- = \\
&= (\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta)_{ac} (\partial^0 + \alpha_s \partial^s + \beta)_{bd} [q_c, q_d]_- = \\
&= (\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta)_{ac} (\partial^0 + \alpha_s \partial^s + \beta)_{bd} \, \mathrm{i} \, \beta_{cd} = \\
&= \mathrm{i} \, (\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta)_{ac} \beta_{cd} (\partial^0 + \alpha_s \partial^s - \beta)_{db} = \\
&= \mathrm{i} \, \{(\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta) \beta (\partial^0 + \alpha_s \partial^s - \beta)\}_{ab} = \\
&= \mathrm{i} \, \{(\partial^0 + \alpha_r \partial^r + \beta)(\partial^0 - \alpha_s \partial^s - \beta) \beta\}_{ab} = \mathrm{i} \, \{(\partial^0 \partial^0 - \partial^r \partial^r + 1) \beta\}_{ab}.
\end{aligned}$$

Таким образом, условие непротиворечивости (25) эквивалентно условию

$$(\partial_\mu \partial^\mu + 1) \psi = 0, \tag{26}$$

или уравнению де Бройля для волновой функции ψ частицы с массой покоя, равной единице. Оператор

$$\partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \tag{27}$$

известен под названием оператора Даламбера. Следовательно, для того чтобы четыре дифференциальных уравнения (20) были взаимно непротиворечивыми, волновая функция ψ должна удовлетворять как этим уравнениям, так и уравнению де Бройля (26).

Мы, естественно, требуем, чтобы новое волновое уравнение имело релятивистски-правильный вид. Это значит, что оно должно быть лоренц-инвариантным. Интересно следующее: (15) можно переписать таким образом, что соотношение приобретет релятивистски-ковариантный вид. Введем для этого новые матрицы

$$\gamma_\mu \equiv \beta \alpha_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{28}$$

причем

$$\alpha_0 \equiv 1. \tag{29}$$

Тогда, умножая левую часть (15) на β и учитывая (28) и (29), получаем

$$(\gamma_\mu \partial^\mu - 1) q \psi = 0, \tag{30}$$

где γ_μ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = -2g_{\mu\nu}. \tag{31}$$

Соотношения (30) и (31) *выглядят* релятивистски-ковариантными, но их релятивистская инвариантность, тем не менее, не очевидна из-за разного характера симметрии величин γ_0 (антисимметрична) и γ_r (симметрична) $[(\gamma_0)_{ba}=\beta_{ba}=-\beta_{ab}=-(\gamma_0)_{ab}$ и $(\gamma_r)_{ba}=(\beta\alpha_r)_{ba}=$ $=\beta_{bc}(\alpha_r)_{ca}=-\beta_{cb}(\alpha_r)_{ac}=-(\alpha_r\beta)_{ab}=(\beta\alpha_r)_{ab}=(\gamma_r)_{ab}]$. Таким образом, временниподобная матрица γ_0 отличается от пространственноподобных γ_r, образующих набор матриц γ_μ.

Отсюда видно, что вопрос о лоренц-инвариантности соотношения (15) требует более последовательного подхода. К счастью, тест на инвариантность уже хорошо известен. Сначала на уравнение надо подействовать инфинитезимальным преобразованием Лоренца. Дальнейшая процедура в точности аналогична тому, как проверялась лоренц-инвариантность уравнения (2). Поэтому я не буду вдаваться в детали и намечу лишь главные этапы. Инфинитезимальное преобразование Лоренца переводит координаты x_μ ($\mu=0$, 1, 2, 3) в новые координаты

$$x_\mu^* = x_\mu + a_\mu{}^\nu x_\nu, \tag{32}$$

где действительные величины

$$a_{\mu\nu} \equiv g_{\mu k} a_\nu{}^k \tag{33}$$

являются инфинитезимальными и антисимметричными:

$$a_{\nu\mu} = -a_{\mu\nu}. \tag{34}$$

Соответственно имеем

$$\partial^{\mu *} = \partial^\mu + a^\mu{}_\nu \partial^\nu = \partial^\mu - a_\nu{}^\mu \partial^\nu \tag{35}$$

и с точностью до величин первого порядка

$$\partial^\mu = \partial^{\mu *} + a_\nu{}^\mu \partial^{\nu *}. \tag{36}$$

Выражение (36) можно подставить в уравнение (15), которое мы перепишем в более сжатом виде

$$(\alpha_\mu \partial^\mu + \beta) q\psi = 0. \tag{37}$$

После перегруппировки членов эта подстановка дает:

$$\{(\alpha_\mu + a_\mu{}^\nu \alpha_\nu) \partial^{\mu *} + \beta\} q\psi = 0. \tag{38}$$

Если ввести теперь для удобства симметричную матрицу

$$N \equiv {}^1/_4 a^{\mu\nu} \alpha_\mu \beta \alpha_\nu, \tag{39}$$

то сразу станет ясно, что после перегруппировки (38) переходит в

$$(\alpha_\mu \partial^\mu + \beta) q^* \psi = 0, \tag{40}$$

где введена величина

$$q^* \equiv (1 - \beta N) q. \tag{41}$$

Однако, поскольку матрицы q^* удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[q_a^*,\ q_b^*]_- = \mathrm{i}\,\beta_{ab}, \tag{42}$$

они будут просто играть роль матриц q. Отсюда следует, что преобразование (32), (41) сохраняет вид уравнения (37) или (15). Значит, вид этого уравнения не будет меняться при любом конечном собственном преобразовании Лоренца.

Интересно, что переход (41) от q к q^* можно переписать как инфинитезимальное унитарное преобразование. В самом деле, в первом порядке по степеням малых величин имеем

$$q^* = \left(1 - \frac{1}{4}\, a^{\mu\nu}\beta\alpha_\mu\beta\alpha_\nu\right) q = \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\, W\right) q \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\, W\right), \tag{43}$$

где

$$W \equiv {}^1/_4 a^{\mu\nu} q^{\sim} \alpha_\mu \beta \alpha_\nu q. \tag{44}$$

Здесь введено обозначение

$$q^{\sim} \equiv (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4) \tag{45}$$

для однострочной матрицы, которая является транспонированной матрицей q, состоящей из одного столбца. Правая часть уравнения (43) есть результат инфинитезимального унитарного преобразования, а W представляет собой инфинитезимальный эрмитов оператор.

Мы подошли к очень интересному свойству нового волнового уравнения, а именно к тому, что оно автоматически разрешает только решения с положительной энергией. Чтобы в этом убедиться, перепишем уравнение (20) в терминах собственных состояний частицы по энергии-импульсу. Таким образом, операторы энергии-импульса частицы сначала запишем в виде

$$p^\mu \equiv \mathrm{i}\,\partial^\mu,$$

а затем через p_μ будем обозначать собственные значения операторов p^μ, выражаемых действительными числами. Следовательно,

$$\mathrm{i}\,\partial^\mu \psi = p^\mu \psi. \tag{46}$$

Подставив в (20) соотношения (46), получим:

$$\{(p_0 - p_3)\, q_1 + (\mathrm{i} + p_1)\, q_3 - p_2 q_4\}\, \psi = 0, \tag{47а}$$

$$\{(p_0 - p_3)\, q_2 - p_2 q_3 + (\mathrm{i} - p_1)\, q_4\}\, \psi = 0, \tag{47б}$$

$$\{(p_0 + p_3)\, q_3 - (\mathrm{i} - p_1)\, q_1 - p_2 q_2\}\, \psi = 0, \tag{47в}$$

$$\{(p_0 + p_3)\, q_4 - p_2 q_1 - (\mathrm{i} + p_1)\, q_2\}\, \psi = 0. \tag{47г}$$

В (47) мы использовали соотношения

$$p_0 = p_0, \quad p^r = -p_r, \quad r = 1,\ 2,\ 3. \tag{48}$$

(Следует заметить, что обозначения p_1, p_2 и p_3 отвечают компонентам импульса частицы. Их не надо путать с такими же обозначениями, которые в уравнениях (6), (7) и в тексте использовались для импульсов двух гармонических осцилляторов: символ p_1 относился к первому осциллятору и впоследствии был заменен символом q_3, а p_2 относился ко второму осциллятору и был заменен обозначением q_4.)

С помощью подходящего преобразования Лоренца можно перейти в систему отсчета, в которой импульс частицы равен нулю, т. е.

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0. \tag{49}$$

В этой системе уравнения (47) записываются следующим образом:

$$(p_0 q_1 + \mathrm{i} q_3)\psi = 0, \tag{50а}$$
$$(p_0 q_2 + \mathrm{i} q_4)\psi = 0, \tag{50б}$$
$$(p_0 q_3 - \mathrm{i} q_1)\psi = 0, \tag{50в}$$
$$(p_0 q_4 - \mathrm{i} q_2)\psi = 0. \tag{50г}$$

В общем случае уравнение де Бройля в терминах величин p^μ и p_μ имеет вид

$$(p_\mu p^\mu - 1)\psi = 0. \tag{51}$$

Следовательно, в подобранной нами системе

$$p_0^2 = 1. \tag{52}$$

Это означает, что для частицы с единичной массой покоя энергия p_0 может принимать лишь значения $+1$ или -1. Поэтому уравнения (50) упрощаются (верхний знак относится к $p_0 = +1$, а нижний — к $p_0 = -1$):

$$(\pm q_1 + \mathrm{i} q_3)\psi = 0; \tag{53а}$$
$$(\pm q_3 + \mathrm{i} q_4)\psi = 0; \tag{53б}$$
$$(\pm q_3 - \mathrm{i} q_1)\psi = 0; \tag{53в}$$
$$(\pm q_4 - \mathrm{i} q_2)\psi = 0. \tag{53г}$$

Теперь ясно, что уравнения (53а) и (53в) эквивалентны. То же самое можно сказать об уравнениях (53б) и (53г). Учитывая, что (в представлении, в котором q_1 и q_2 диагональны)

$$q_3 \equiv -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \quad q_4 \equiv -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_2}, \tag{54}$$

можно сократить число волновых уравнений до двух дифференциальных уравнений

$$\left(q_1 \pm \frac{\partial}{\partial q_1}\right)\psi = 0 \tag{55}$$

и

$$\left(q_2 \pm \frac{\partial}{\partial q_2}\right)\psi = 0, \tag{56}$$

верхний знак в которых опять отвечает $p_0 = +1$, а нижний — $p_0 = -1$. Эти уравнения довольно легко интегрируются и дают

$$\psi \sim \exp\left[-(q_1^2 + q_2^2)/2\right], \qquad p_0 = +1 \tag{57}$$

и

$$\psi \sim \exp[(q_1^2+q_2^2)/2], \qquad p_0=-1. \tag{58}$$

Решение (58) физически совершенно неприемлемо, потому что оно расходится при больших значениях q_1 и q_2 и, следовательно, его нельзя нормировать. Допустимо лишь решение (57), следовательно, только собственное значение энергии $p_0=+1$ является разрешенным. Собственное значение энергии с отрицательным знаком автоматически исключается из-за того, что решение (58) невозможно.

В системах отсчета, отличных от только что рассмотренной специальной системы, результат, к которому мы пришли, остается справедливым; лишь решения с положительной энергией дают волновые функции, имеющие физический смысл *).

Замечателен сам по себе тот факт, что для частиц, описываемых новыми волновыми уравнениями, разрешены только положительные значения энергии. Однако это не совсем новый результат: еще в 1932 году Майорана предложил лоренц-инвариантное волновое уравнение, у которого были разрешены только решения с положительной энергией. Уравнение Майораны имело вид

$$(q^{\sim}\alpha_\nu q\partial^\nu+2i)\psi=0 \tag{59}$$

и было лоренц-инвариантным. Если теперь умножить уравнение (37) на линейные функции переменных q, то получатся уравнения, которые в общем случае записываются следующим образом:

$$\{q^{\sim}\lambda\alpha_\mu q\partial^\mu+q^{\sim}\lambda\beta q\}\psi=0, \tag{60}$$

где λ — некая матрица размера 4×4, так что $q^{\sim}\lambda$ — линейная функция переменных q. Существует, оказывается, 15 независимых матриц λ, дающих разные результаты. Следовательно, существует и 15 разных уравнений типа (60), квадратичных по переменным q. Одно из этих уравнений, а именно то, которому отвечает $\lambda=1$, идентично уравнению Майораны (59).

Поэтому было бы весьма заманчиво ограничиться рассмотрением уравнения Майораны и его решений. Это уравнение очень подробно исследовал сам Майорана, и ему удалось показать, что оно приводит к массовому спектру, состоящему из бесконечного числа значений масс. Поначалу это может показаться многообещающим, но вычислив спин майорановских частиц, вы увидите, что увеличение спина частицы сопровождается уменьшением ее массы,

*) В статье, напечатанной в 1971 году в журнале «Proceedings of Royal Society», профессор Дирак утверждает, что в общем случае уравнения (47) после интегрирования дают

$$\exp\left\{-\frac{q_1^2+q_2^2+i\,p_1(q_1^2-q_2^2)-2\,i\,p_2q_1q_2}{2(p_0+p_3)}\right\}\exp(-ip^\mu x_\mu),$$

откуда опять следует, что решение имеет смысл только тогда, когда энергия p_0 положительна.— *Примеч. редактора английского издания.* (См. Proc. Roy. Soc. (Lond.).— 1971.— V. A322.— P. 435; 1972.— V. A328.— P. 1.— *Примеч. ред.*)

так что у более тяжелых майорановских частиц спин должен был бы быть меньше, чем у более легких. Конечно, все сказанное полностью противоречит данным эксперимента. По этой причине физики отказались от уравнения Майораны.

Таким образом, нам следует придерживаться постоянного значения массы частицы и сохранить тем самым уравнение де Бройля. Это равносильно сохранению всей системы уравнений (60), т. е. всех 15 уравнений. Одно из них будет иметь майорановский вид, но если его рассматривать совместно с 14 остальными, то оно не приводит к тем нежелательным свойствам частиц, о которых мы говорили.

Мы подошли к вопросу о спине частицы. Поскольку времени осталось немного, я расскажу о нем лишь в общих чертах. Подход, который используют для вычисления спина частицы, подчиняющейся волновому уравнению, состоит в том, что на волновую функцию действуют оператором инфинитезимального вращения (вокруг начала координат), один из членов которого содержит оператор спина, а потом требуют, чтобы преобразованная волновая функция удовлетворяла тому же уравнению, которому удовлетворяла непреобразованная волновая функция. Поэтому функцию ψ в (37) мы преобразуем в «повернутую» волновую функцию

$$(1 + {}^1\!/_2 a^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma})\,\psi, \tag{61}$$

где

$$M_{\rho\sigma} = x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho - \mathrm{i}\, s_{\rho\sigma}, \tag{62}$$

причем $s_{\rho\sigma}$ обозначены спиновые операторы, действующие на переменные q. Потребовав теперь, чтобы волновая функция (61) удовлетворяла уравнению (37), мы в конце концов получим формулу

$$s_{\rho\sigma} = -\frac{1}{4}\, q^{\sim}\alpha_\rho \beta \alpha_\sigma q + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\, g_{\rho\sigma} \tag{63}$$

для случая, когда оператор $s_{\rho\sigma}$ антисимметричен. Выбрав α в соответствии с (18), будем иметь

$$\begin{aligned}
s_{01} &= \frac{1}{4}(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2), & s_{02} &= \frac{1}{2}(q_3 q_4 - q_1 q_2),\\
s_{03} &= \frac{1}{2}(q_1 q_3 + q_4 q_2), & s_{12} &= \frac{1}{2}(q_2 q_3 - q_1 q_4),\\
s_{23} &= \frac{1}{2}(q_1 q_2 + q_3 q_4), & s_{31} &= \frac{1}{4}(q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2).
\end{aligned} \tag{64}$$

Три последних уравнения дают

$$s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 = \frac{1}{16}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2 - \frac{1}{4}. \tag{65}$$

По правилам квантовой механики значение, например, спина s определяется из соотношения

$$s(s+1) = s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2. \tag{66}$$

Следовательно, выражение (65) дает формулу для спина частицы, которая описывается уравнением (37)

$$s=\frac{1}{4}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2\right)-\frac{1}{2}. \tag{67}$$

Теперь собственные значения $\frac{1}{2}(q_1^2+q_3^2)$, как и собственные значения энергии гармонического осциллятора, имеют вид $n+{}^1/_2$, а собственные значения ${}^1/_2(q_2^2+q_4^2)$ имеют вид $n'+\frac{1}{2}$, где n и n' — положительные целые числа или нули. Следовательно, собственные значения s выражаются формулой

$${}^1/_2(n+n'). \tag{68}$$

Но оказывается, что волновая функция, удовлетворяющая (37), всегда должна быть четной функцией переменных q, так что сумма $n+n'$ всегда или четна, или равна нулю. Отсюда вытекает, что значение спина либо выражается целым числом, либо равно нулю. Таким образом, частица, которая описывается волновым уравнением (37), представляет собой частицу с целым спином.

Казалось бы, здесь должны возникать трудности, связанные со спином: s могло бы зависеть от импульса частицы. Однако этот вывод неправилен. Поскольку процедура деления углового момента на орбитальную и спиновую части не является релятивистской, можно переопределить спин частицы так, чтобы устранить ложную зависимость от импульса.

Выясним теперь вкратце, что представляет собой частица, которая описывается такой теорией. В частности, посмотрим, каким будет внутреннее движение частицы. Для ответа на этот вопрос лучше всего прибегнуть к гейзенбергову представлению, потому что оно дает информацию, близкую к классическому описанию движения и, следовательно, самую подходящую для нахождения классического аналога любой квантовой теории.

В теории, которая описывается старым уравнением (2) для частиц со спином $\frac{1}{2}$, гейзенберговы уравнения движения приводят к «дрожанию» электрона. Оно действительно возникает, если координаты частицы x_r записать в виде суммы двух частей:

$$x_r=y_r+\xi_r, \tag{69}$$

где

$$y_r=b_r+(p_r/p_0)\,t \tag{70}$$

описывает классическое движение, причем b_r не зависит от времени, а ξ_r описывает малые колебания с большой частотой. В излагаемой теории возможно несколько видов движения, потому что координаты x_r могут изменяться двумя разными способами: со временем и под действием калибровочных преобразований.

Оказывается, что изменение координаты частицы с нулевым импульсом под действием калибровочного преобразования отвечает блужданию точки x_r по поверхности шара. Это лишено физического смысла. Для физики важна лишь сама шаровая поверхность. Ее радиус-вектор удовлетворяет соотношению — $s_{r0}=+s_{0r}$ (см. (64)); он колеблется, и поэтому вся картина представляет собой пульсирующий шар.

Что можно сказать о будущем нашего нового уравнения? На данном этапе существуют довольно серьезные трудности, из-за которых дальнейшее развитие теории невозможно. Трудности связаны с тем, что электромагнитные взаимодействия частицы, подчиняющейся уравнениям (37), невозможно описать никакими известными методами. Дело в том, что, попытавшись ввести электромагнитное поле (определяемое четырьмя компонентами потенциала A_μ) путем замены в волновом уравнении 4-импульса p_μ величиной $p_\mu+eA_\mu$:

$$p_\mu \to p_\mu+eA_\mu, \tag{71}$$

вы обнаружите, что преобразованная система волновых уравнений (47), вообще говоря, внутренне противоречива. Внутренняя непротиворечивость восстанавливается только тогда, когда четыре компоненты потенциала имеют вид

$$A_\mu=\partial_\mu S, \tag{72}$$

где S — некоторая функция. Но это просто соответствует ситуации, когда все компоненты тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{73}$$

обращаются в нуль. Следовательно, никакого физически наблюдаемого поля не существует. Все сказанное означает, что нет согласованной теории, описывающей частицы, о которых шла речь, в случае, когда они имеют заряд или обладают какими-нибудь другими электромагнитными свойствами.