

§ 11.4. Длина свободного пробега молекул

1. До сих пор мы предполагали, что молекулы газа подобны материальным точкам, т. е. имеют исчезающе малые размеры. Это дало нам возможность не учитывать соударения между хаотически движущимися молекулами. В действительности молекулы имеют конечные размеры и непрерывно соударяются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы движутся прямолинейно и равномерно, проходя при этом некоторые расстояния λ , называемые длинами свободных пробегов. Эти расстояния могут быть самыми разными. Поэтому вводится понятие о *средней длине свободного пробега* $\langle \lambda \rangle$. Чтобы найти $\langle \lambda \rangle$, будем считать, что молекулы газа представляют собой шарики определенного диаметра d (порядка 10^{-8} см), зависящего от химической природы газа. В дальнейшем мы увидим, что такая модель хорошо передает характер того взаимодействия, которое происходит при сильном сближении молекул реальных газов (см. § 13.1).

2. Подсчитаем среднее число соударений, которые испытывает молекула при своем движении в однородном газе за единицу времени. Для упрощения расчетов будем предполагать, что все остальные молекулы, кроме рассматриваемой, неподвижны, а эта одна движется со скоростью, равной средней арифметической скорости $\langle u \rangle$.

При своем движении молекула будет сталкиваться со всеми молекулами газа, центры которых отстоят от траектории движения ее центра на расстояниях, меньших или равных диаметру молекул d . За единицу времени рассматриваемая молекула столкнется со всеми частицами, центры которых лежат внутри цилиндра с высотой $\langle u \rangle$ и радиусом основания d (рис. 11.8). Если n_0 — число молекул в единице объема газа, то среднее число $\langle Z \rangle$ соударений молекулы в единицу времени будет равно:

$$\langle Z \rangle = \pi d^2 n_0 \langle u \rangle \quad (11.16)$$

3. Предположение о том, что все молекулы, кроме одной, неподвижны, является, конечно, неверным. В действительности все молекулы движутся, и возможность соударения двух частиц зависит от их *относительной скорости*. Поэтому в формулу (11.16) вместо средней арифметической скорости $\langle u \rangle$ должна входить средняя относительная скорость молекул $\langle u_{\text{отн}} \rangle$. Если скорости молекул распределены по закону Д. К. Максвелла, то, как можно показать, средняя относительная скорость двух молекул однородного газа в $\sqrt{2}$ раз превышает $\langle u \rangle$:

$$\langle u_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \cdot \langle u \rangle. \quad (11.17)$$

Таким образом, среднее число соударений должно быть увеличено в $\sqrt{2}$ раз:

$$\langle Z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n_0 \langle u \rangle. \quad (11.18)$$

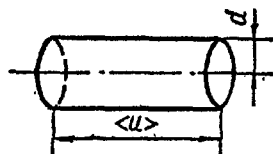


Рис. 11.8.

Средний путь, проходимый молекулой за единицу времени, численно равен $\langle u \rangle$. Поэтому средняя длина свободного пробега выразится следующим образом:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle Z \rangle}.$$

Подставив выражение $\langle Z \rangle$ из (11.18), получим

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0}. \quad (11.19)$$

Из формулы (11.19) следует, что при постоянной температуре, когда число молекул в единице объема пропорционально давлению газа, средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению. Следовательно, для данного газа при $T = \text{const}$ и различных давлений p_1 и p_2 имеем

$$\langle \lambda \rangle_1 \cdot p_1 = \langle \lambda \rangle_2 \cdot p_2 = \text{const}.$$

В табл. 4 приведены значения средней длины свободного пробега молекул воздуха при 0°C и различных давлениях.

Таблица 4

p , мм. рт. ст.	760	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$\langle \lambda \rangle$, см	$6,5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-8}$	0,5	50	5000

4. Среднюю длину свободного пробега молекулы можно определить экспериментально. Рассмотрим схему опыта, осуществленного М. Борном и Е. Борманом в 1920 г.

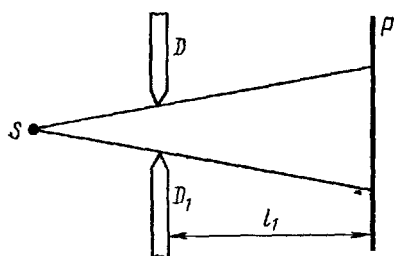


Рис. 11.9.

Серебряный шарик S (рис. 11.9) был помещен в стеклянный баллон, в котором создавался высокий вакуум (см. § 11.9). С помощью электрической печи шарик нагревался до высокой температуры и испускал во все стороны атомы серебра. Часть из них проходила через диафрагму DD_1 , образуя расходящийся пучок. На расстоянии l_1 от диафрагмы была помещена приемная стеклянная пластинка P , на которой происходила конденсация атомов серебра.

Если бы не было соударений между атомами серебра и молекулами воздуха (при полном вакууме в баллоне), все атомы пучка достигали бы пластинки P и оседали на ней¹. В действительности часть молекул

¹ Мы пренебрегаем соударениями между атомами серебра в пучке.

воздуха оставалась в баллоне. Поэтому происходило рассеяние атомов серебра на молекулах воздуха. Пусть из общего числа N атомов, дошедших до слоя воздуха толщиной dx , некоторое число dN атомов испытывает в этом слое соударения с молекулами воздуха и выбывает из состава атомов пучка. Тогда относительная убыль атомов в пучке — $\frac{dN}{N}$ связана со средней длиной $\langle \lambda \rangle$ свободного пробега атомов серебра в воздухе соотношением

$$-\frac{dN}{N} = \frac{dx}{\langle \lambda \rangle}.$$

Проинтегрировав левую и правую части этого уравнения, получим

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{x}{\langle \lambda \rangle}}, \quad (11.20)$$

где N_0 — число атомов в пучке при $x = 0$, т. е. на выходе из диафрагмы. Величина N/N_0 равна вероятности того, что частицы пучка проходят без соударений расстояние x . Поэтому выражение (11.20) называют **законом распределения свободных пробегов**.

Таким образом, число атомов серебра, осевших на пластинке P ,

$$N_1 = N_0 \cdot e^{-l_1/\langle \lambda \rangle}. \quad (11.20')$$

При втором опыте, проведенном при том же давлении воздуха в баллоне и той же температуре нагрева шарика S , на приемной пластинке P , расположенной на расстоянии l_2 от диафрагмы, оседало число атомов серебра

$$N_2 = N_0 e^{-l_2/\langle \lambda \rangle}. \quad (11.20'')$$

Разделив (11.20') на (11.20'') и прологарифмировав полученное выражение, найдем

$$\langle \lambda \rangle = \frac{l_2 - l_1}{\ln \frac{N_1}{N_2}}.$$

Практически в опыте измеряли толщины D_1 и D_2 слоев серебра, отложившегося на пластинках P_1 и P_2 за один и тот же промежуток времени, так как $\frac{N_1}{N_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

5. При выводе формулы (11.19) мы считали, что соударяющиеся молекулы подобны твердым шарикам диаметра d . В действительности

каждая молекула представляет систему ядер и электронов. Ясно, что такие молекулы соударяются не как твердые шары. Вместе с тем, представление о том, что при соударениях каждая молекула имеет некоторый «эффективный» диаметр d и «эффективное» поперечное сечение πd^2 , оказывается правильным. Эффективное поперечное сечение молекул зависит от характера сил взаимодействия между ними. При увеличении скоростей движения молекул, т. е. при повышении температуры газа, эффективное поперечное сечение молекул уменьшается. Мы еще вернемся к этому вопросу дальше в § 13.1.

В заключение заметим, что величину $\langle \lambda \rangle$ можно определить экспериментально на основе изучения явлений переноса в газах (см. § 11.8).

§ 11.5. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы

1. Прежде чем перейти к дальнейшему изучению свойств газов, остановимся на некоторых общих вопросах, связанных с применением статистического метода в молекулярной физике. Особое место здесь занимает закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Числом степеней свободы тела называют наименьшее число координат (число независимых координат), которые необходимо задать для того, чтобы полностью определить положение тела в пространстве. Так, например, материальная точка, свободно движущаяся в пространстве, обладает тремя степенями свободы (координаты x ; y ; z). Абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы: для определения его положения в пространстве нужно задать три координаты центра масс тела, две координаты, определяющие положение в пространстве определенной оси, проходящей через центр масс и какую-либо другую фиксированную точку тела, и, наконец, нужно еще задать угол поворота тела вокруг этой оси по отношению к некоторому начальному положению. Следовательно, абсолютно твердое тело обладает тремя степенями свободы поступательного движения и тремя степенями свободы вращательного движения.

Если тело не абсолютно твердое и его части могут смещаться друг относительно друга, то необходимо вводить еще дополнительные степени свободы колебательного движения.

2. Молекулы одноатомного газа можно рассматривать как материальные точки на том основании, что масса такой частицы (атома) сосредоточена в ядре, размеры которого очень малы. Молекула одноатомного газа имеет три степени свободы поступательного движения. Ее средняя кинетическая энергия $\langle \omega_{\kappa} \rangle$ равна кинетической энергии молекулы, движущейся со скоростью, равной средней квадратичной скорости $v_{\kappa B}$:

$$\langle \omega_{\kappa} \rangle = \frac{mv_{\kappa B}^2}{2}. \quad (11.21)$$