

Примеры решения задач

Задача 11.1. Средняя длина свободного пробега молекул азота при температуре 280 К и нормальном атмосферном давлении $7,2 \cdot 10^{-8}$ м. Определить среднее число столкновений в секунду при давлении 0,133 Па и той же температуре.

Д а н о

$$\begin{aligned} p_1 &= 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па,} \\ \langle \lambda_1 \rangle &= 7,2 \cdot 10^{-8} \text{ м,} \\ p_2 &= 0,133 \text{ Па,} \\ T_1 &= T_2 = 280 \text{ К,} \\ \mu &= 0,028 \text{ кг/моль} \\ \langle Z_2 \rangle &= ? \end{aligned}$$

Р е ш е н и е

Среднее число $\langle Z \rangle$ соударений, испытываемых молекулой за единицу времени, как показано в § 11.4, равно

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle \lambda \rangle},$$

где $\langle u \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения молекул.

По формуле (11.10)

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

При постоянной температуре газа средняя длина свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ обратно пропорциональна давлению газа:

$$\langle \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_1 \rangle \frac{p_1}{p_2}.$$

Следовательно,

$$\langle Z_2 \rangle = \frac{\langle u_2 \rangle}{\langle \lambda_2 \rangle} = \frac{p_2}{\langle \lambda_1 \rangle p_1} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$\langle Z_2 \rangle = \frac{0,133}{7,2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,01 \cdot 10^5} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 10^8 \cdot 280}{3,14 \cdot 28}} \text{ с}^{-1} = 8,4 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 11.2. Вычислить кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 1 кг кислорода при 47° С.

Д а н о

$$\begin{aligned} M &= 1 \text{ кг,} \\ t &= 47^\circ \text{ С; } T = 320 \text{ К,} \\ \mu &= 0,032 \text{ кг/моль} \\ W_{\text{к}}^{\text{вр}} &= ? \end{aligned}$$

Р е ш е н и е

По закону о равномерном распределении энергии между всеми степенями свободы молекулы на одну степень свободы ее поступательного или вращательного движения в среднем приходится кинетическая энергия

$$\langle \omega_0 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана.

Молекула кислорода содержит два атома и поэтому обладает двумя степенями свободы вращательного движения. Следовательно, средняя кинетическая энергия вращательного движения одной молекулы кислорода

$$\langle \omega_{\text{к}}^{\text{вр}} \rangle = kT.$$

Искомая энергия $W_K^{вр}$ больше $\langle w_K^{вр} \rangle$ во столько раз, сколько молекул содержится в M килограммах кислорода:

$$W_K^{вр} = kT \frac{M}{\mu} N_A,$$

где N_A — число молекул в одном моле газа (число Авогадро).

По формуле (9.11) $kN_A = R$, поэтому окончательно получим:

$$W_K^{вр} = \frac{RM T}{\mu}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$W_K^{вр} = \frac{8,31 \cdot 10^3 \cdot 320}{32} \text{ Дж} = 8,31 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Задача 11.3. Вычислить удельные теплоемкости воздуха c_V и c_p , считая в его составе 20% кислорода и 80% азота

Д а н о

Р е ш е н и е

$$M_1 = 0,2 \text{ М},$$

$$M_2 = 0,8 \text{ М},$$

$$\mu_1 = 0,032 \text{ кг/моль},$$

$$\mu_2 = 0,028 \text{ кг/моль}$$

$$c_V = ? \quad c_p = ?$$

Молярные теплоемкости идеального газа вычисляются по формулам (11.27):

$$C_V = \frac{iR}{2}, \quad C_p = \frac{(i+2)R}{2},$$

где i — число степеней свободы молекул (для кислорода и азота $i = 5$). Поэтому удельные теплоемкости кислорода

$$c_{V_1} = \frac{5R}{2\mu_1} \text{ и } c_{p_1} = \frac{7R}{2\mu_1}.$$

Соответственно, удельные теплоемкости азота

$$c_{V_2} = \frac{5R}{2\mu_2} \text{ и } c_{p_2} = \frac{7R}{2\mu_2}.$$

Для нагревания M килограммов воздуха на 1 К при постоянном объеме требуется количество теплоты, равное

$$c_V M = \frac{5R}{2\mu_1} M_1 + \frac{5R}{2\mu_2} M_2,$$

откуда

$$c_V = 0,5R \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{4}{\mu_2} \right). \quad (a)$$

Для нагревания M килограммов воздуха на 1 К при постоянном давлении требуется количество теплоты, равное

$$c_p M = \frac{7R}{2\mu_1} M_1 + \frac{7R}{2\mu_2} M_2.$$

откуда

$$c_p = 0,7R \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{4}{\mu_2} \right) \quad (6)$$

Подставляя в выражения (а) и (б) числовые данные, получим в Международной системе единиц (СИ):

$$c_V = 0,5 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{4}{28} \right) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 724 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$c_p = 0,7 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{4}{28} \right) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 1010 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$