кости, который непосредственно прилегает к поверхности труб, каналов и обтекаемых тел. Вне пограничного слоя течение реальной жидкости ничем не отличается от течения идеальной жидкости. Поэтому, изучая движение идеальной жидкости, можно установить ряд закономерностей, которые с известным приближением применимы к течению реальных жидкостей. Это приближение тем более точно, чем меньше вязкость жидкости. Вязкость многих жидкостей (например, воды, спирта и др.) в обычных условиях сравнительно невелика, вязкость же газов вообще незначительна.

8. Рассматривая вопросы механики твердого тела, мы пользовались понятием абсолютно твердого (абсолютно недеформируемого) тела, расстояния между частицами которого всегда остаются неизменными. Между абсолютно твердым телом и идеальной несжимаемой жидкостью имеется сходство в отношении объемной деформации и коренное различие в отношении деформации сдвига. Если модуль сдвига абсолютно твердого тела равен бесконечности, то модуль сдвига идеальной жидкости равен нулю.

§ 16.2. Уравнение неразрывности и уравнение Бернулли

1. Рассмотрим участок элементарной струйки жидкости, ограниченной двумя произвольно выбранными нормальными сечениями *1* и *2*, площади которых равны dS_1 и dS_2 (рис. 16.2). Скорости жидкости в этих сечениях обозначим через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Если течение жидкости установившееся, то масса жидкости, заключенной в участке струи между сечениями *1* и *2*, не зависит от времени. Следовательно, масса $dm_1 = \rho_1 v_1 \cdot dS_1$ жидкости, поступающей в рассматриваемый участок за единицу времени сквозь сечение *1*, равна массе $dm_2 = \rho_2 v_2 \cdot dS_2$ жидкости, вытекающей из этого участка за то же время сквозь сечение *2*:

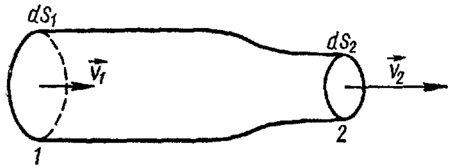

Рис. 16.2.

$$\rho_1 v_1 \cdot dS_1 = \rho_2 v_2 \cdot dS_2. \qquad (16.1)$$

Поскольку сечения *1* и *2* выбраны совершенно произвольно, то

$$\rho v \cdot dS = dm_{\text{сек}}, \qquad (16.2)$$

где ρ и v — значения плотности и скорости жидкости в произвольном поперечном сечении струи площадью dS, а $dm_{\text{сек}}$ — **секундный массовый расход жидкости**, п о с т о я н н ы й в д о л ь с т р у и.

Полученное нами соотношение называют **уравнением неразрывности**. В случае н е с ж и м а е м о й жидкости плотность ρ одинакова во всех сечениях струи и уравнение неразрывности имеет вид:

$$v \cdot dS = dV_{\text{сек}}, \tag{16.3}$$

где $dV_{\text{сек}}$ — секундный объемный расход жидкости, постоянный вдоль струи.

2. Для струи с конечной площадью S произвольного поперечного сечения секундные массовый и объемный расходы жидкости равны:

$$m_{\text{сек}} = \int_0^S \rho v \cdot dS \quad \text{и} \quad V_{\text{сек}} = \int_0^S v \cdot dS.$$

Если ρ и v постоянны по всему поперечному сечению S, то

$$m_{\text{сек}} = \rho v S \text{ и } V_{\text{сек}} = v S.$$

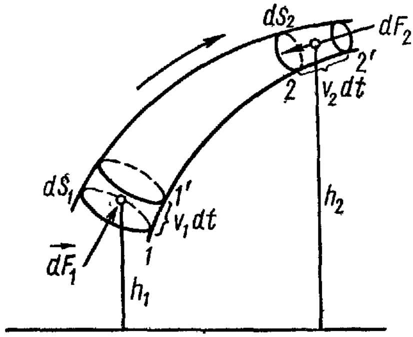

Рис. 16.3.

3. Выделим мысленно часть идеальной несжимаемой жидкости, которая в некоторый момент времени t заполняет участок элементарной струи, ограниченный нормальными сечениями *1* и *2* (рис. 16.3). В случае установившегося течения (направление течения показано на рис. 16.3 стрелкой) рассматриваемый объем жидкости к моменту времени $t + dt$ переместится вдоль струи и будет заключен между сечениями $1'$ и $2'$. По закону сохранения энергии изменение dW полной энергии жидкости равно сумме теплоты δQ, сообщенной жидкости за время dt, и работы $\delta A'$, совершенной внешними силами:

$$dW = \delta Q + \delta A'.$$

Так как силы трения в идеальной жидкости отсутствуют, то на рассматриваемую часть жидкости действуют только внешние силы давления, приложенные со стороны остальной жидкости. Влияние силы тяжести мы учтем, введя в выражение для полной энергии член $W_{\text{п}}$, характеризующий потенциальную энергию жидкости в поле тяготения Земли:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} + U,$$

где $W_{\text{к}}$ — кинетическая энергия жидкости, U — ее внутренняя энергия. В дальнейшем мы будем предполагать, что теплообмен отсутствует ($\delta Q = 0$) и $U = \text{const}$. Поэтому

$$d(W_{\text{к}} + W_{\text{п}}) = \delta A'. \tag{16.4}$$

Работа сил давления, приложенных к боковой поверхности струи, равна нулю, так как эти силы направлены перпендикулярно к направлению течения жидкости. Поэтому работа $\delta A'$ равна разности работ сил давления $d\mathbf{F}_1$ и $d\mathbf{F}_2$, действующих на поперечные сечения *1* и *2*, площади которых равны соответственно dS_1 и dS_2:

$$\delta A' = p_1 \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt - p_2 \cdot dS_2 \cdot v_2 \cdot dt = (p_1 - p_2) v_1 \cdot dS_1 \cdot dt, \qquad (16.5)$$

где p_1 и p_2 — давления в сечениях *1* и *2*, v_1 и v_2 — скорости течения жидкости в этих сечениях, причем, как следует из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, $v_1 \cdot dS_1 = v_2 \cdot dS_2$. Поток жидкости установившийся, поэтому можно утверждать, что в объеме, заключенном между сечениями *1'* и *2*, не произошло никаких изменений. Энергия этого участка жидкости осталась также прежней. Все свелось к тому, что часть жидкости массой dm, которая первоначально была заключена между сечениями *1* и *1'*, оказалась как бы перенесенной в новое положение между сечениями *2* и *2'*. Поэтому изменение кинетической и потенциальной энергий всей жидкости, первоначально заключенной между сечениями *1* и *2*, равны:

$$\left.\begin{aligned} dW_{\text{к}} &= \frac{dm}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right), \\ dW_{\text{п}} &= dm \cdot g(h_2 - h_1), \end{aligned}\right\} \qquad (16.6)$$

где $dm = \rho v_1 \cdot dS_1 \cdot dt = \rho v_2 \cdot dS_2 \cdot dt$, а h_1 и h_2 — вертикальные расстояния от некоторого условного горизонтального уровня до центров тяжести элементов объема жидкости, заключенных в струе между сечениями *1* и *1'* и *2* и *2'*.

Ввиду малости этих элементов можно считать, что h_1 и h_2 — высоты центров тяжести сечений *1* и *2* над условным уровнем. Подставив в уравнение (16.4) значения $\delta A'$, $dW_{\text{к}}$, $dW_{\text{п}}$ из формул (16.5) и (16.6), получаем

$$\frac{dm}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + dm \cdot g\,(h_2 - h_1) = (p_1 - p_2)\, v_1\, dS_1\, dt,$$

или после сокращения на $v_1 \cdot dS_1 dt = \frac{dm}{\rho}$ и простых преобразований,

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho g h_2. \qquad (16.7)$$

Сечения *1* и *2* были выбраны совершенно произвольно. Следовательно, уравнение (16.7) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g h = \text{const}. \qquad (16.8)$$

Это уравнение называют **уравнением Бернулли**, так как впервые оно было получено Д. Бернулли. Оно, как видно из его вывода, является выражением закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной несжимаемой жидкости.

4. В случае горизонтальной струи (например, при течении жидкости в горизонтальной трубе) величина h постоянна, и уравнение Бернулли принимает более простой вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \mathrm{const}. \qquad (16.8')$$

Величину p называют **статическим давлением**, $\frac{\rho v^2}{2}$ — **скоростным, или динамическим, напором**, а $p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2}$ — **полным давлением**. Статическое давление равно давлению жидкости на поверхность обтекаемого ею тела, например на стенки трубы. Для измерения статического давления в потоке жидкости может быть применена трубка, изображенная на рис. 16.4. Колено AB трубки располагают параллельно потоку, а колено BC — вертикально и сообщают с атмосферой. Передний конец A трубки закрыт, а в боковой поверхности колена AB сделано небольшое отверстие O. Статическое давление p в точке O равно: $p = p_a + \rho g H$, где ρ — плотность жидкости, H — высота поднятия жидкости в колене BC, p_a — атмосферное давление.

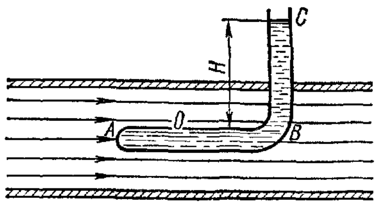

Рис. 16.4.

Для измерения полного давления в потоке жидкости ее необходимо предварительно затормозить. Это осуществляют посредством трубки с открытым передним концом, изображенной на рис. 16.5. Скоростной напор измеряют трубкой Пито, представляющей комбинацию трубок полного и статического давлений. Схематически она изображена на рис. 16.6.

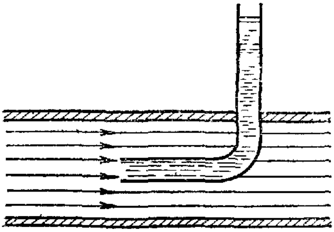
Рис. 16.5.

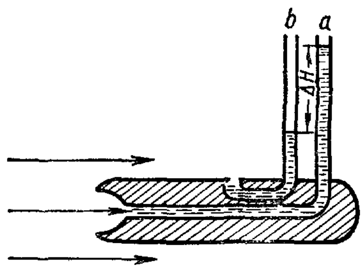

Рис. 16.6.

Динамический напор равен

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g \Delta H,$$

где ΔH — разность уровней жидкости в трубках a и b соответственно полного и статического давлений.

5. Поток жидкости называют **потенциальным**, если циркуляция Γ вектора скорости $\mathbf{v}$ вдоль любого замкнутого контура L, проведенного в потоке, равна нулю:

$$\Gamma = \oint\limits_L (\mathbf{v}, d\mathbf{r}) \equiv 0,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки замкнутого контура.

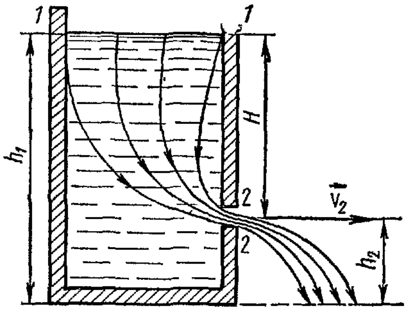

Рис. 16.7.

Уравнение Бернулли (16.8) было выведено нами для одной струи жидкости. Можно доказать, что в случае установившегося потенциального течения константа в правой части уравнения (16.8) одинакова для всех струй, т. е. что уравнение Бернулли справедливо для всего потока в целом.

6. Пользуясь уравнением Бернулли, легко найти выражение для скорости истечения жидкости сквозь отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд, заполненный идеальной жидкостью. В боковой стенке его на некоторой глубине H ниже уровня жидкости проделано малое отверстие (рис. 16.7).

Рассмотрим два сечения: *1—1* — на уровне свободной поверхности жидкости в сосуде и *2—2* — на выходе из отверстия. Напишем для них уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Давление p_1 жидкости в сечении *1—1* открытого сосуда равно атмосферному. Очевидно, что давление p_2 тоже равно атмосферному. Пренебрегая изменением атмосферного давления в пределах высоты сосуда, можно принять, что $p_1 = p_2$. В таком случае уравнение Бернулли будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2. \qquad (16.9)$$

Из уравнения неразрывности следует, что

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2},$$

где S_1 и S_2— площади поперечных сечений сосуда и отверстия.

Если $S_1 \gg S_2$, то членом $\frac{v_1^2}{2}$ в левой части уравнения (16.9) можно пренебречь. Поэтому

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gH,$$

или

$$v_2 = \sqrt{2gH}. \qquad (16.10)$$

Полученное выражение носит название **формулы Торичелли.** Из нее видно, что частицы жидкости, выходя из отверстия, имеют такую же скорость, какую они приобрели бы, свободно падая с высоты H до уровня отверстия.

§ 16.3. Течение вязких жидкостей в трубах

1. Влияние внутреннего трения (вязкости), как указывалось выше, играет существенную роль в пограничном слое. При течении жидкости в трубах толщина этого слоя тем больше, чем больше вязкость жидкости, и возрастает по мере удаления от входа в трубу.

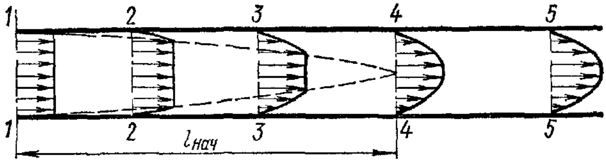

Рис. 16.8.

В пределах пограничного слоя скорость жидкости изменяется от нулевой скорости на стенке трубы до максимального значения на внешней границе пограничного слоя. Таким образом, влияние вязкости приводит к тому, что скорость жидкости неодинакова в различных точках одного и того же поперечного сечения трубы. Распределение скорости жидкости в различных сечениях круглой цилиндрической трубы показано на рис. 16.8. Во входном сечении (*1—1*) толщина пограничного слоя равна нулю и скорость одинакова во всех точках этого сечения. По мере удаления от сечения *1—1* (сечения *2—2*, *3—3*) толщина пограничного слоя возрастает и область потока с постоянной по сечению скоростью уменьшается. Граница пограничного слоя показана на рис. 16.8 пунктиром. В сечении *4—4* толщина пограничного слоя становится равной радиусу трубы, так что скорость оказывается различной во всех точках сечения, находящихся на неодинаковых расстояниях от оси трубы. Расстояние $l_{нач}$ между сечениями *1—1* и *4—4* называют **длиной участка гидродинамической стабилизации,** так как за сечением *4—4* дальнейшее изменение распределения скоростей жидкости прекращается — поток стабилизируется.