

Если $S_1 \gg S_2$, то членом $\frac{v_1^2}{2}$ в левой части уравнения (16.9) можно пренебречь. Поэтому

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gH,$$

или

$$v_2 = \sqrt{2gH}. \quad (16.10)$$

Полученное выражение носит название **формулы Торичелли**. Из нее видно, что частицы жидкости, выходя из отверстия, имеют такую же скорость, какую они приобрели бы, свободно падая с высоты H до уровня отверстия.

§ 16.3. Течение вязких жидкостей в трубах

1. Влияние внутреннего трения (вязкости), как указывалось выше, играет существенную роль в пограничном слое. При течении жидкости в трубах толщина этого слоя тем больше, чем больше вязкость жидкости, и возрастает по мере удаления от входа в трубу.

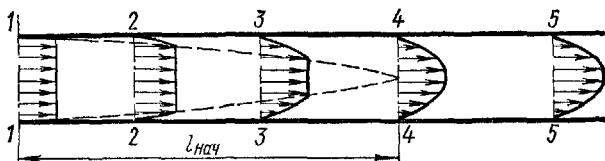


Рис. 16.8.

В пределах пограничного слоя скорость жидкости изменяется от нулевой скорости на стенке трубы до максимального значения на внешней границе пограничного слоя. Таким образом, влияние вязкости приводит к тому, что скорость жидкости неодинакова в различных точках одного и того же поперечного сечения трубы. Распределение скорости жидкости в различных сечениях круглой цилиндрической трубы показано на рис. 16.8. Во входном сечении (1—1) толщина пограничного слоя равна нулю и скорость одинакова во всех точках этого сечения. По мере удаления от сечения 1—1 (сечения 2—2, 3—3) толщина пограничного слоя возрастает и область потока с постоянной по сечению скоростью уменьшается. Граница пограничного слоя показана на рис. 16.8 пунктиром. В сечении 4—4 толщина пограничного слоя становится равной радиусу трубы, так что скорость оказывается различной во всех точках сечения, находящихся на неодинаковых расстояниях от оси трубы. Расстояние $l_{нач}$ между сечениями 1—1 и 4—4 называют **длиной участка гидродинамической стабилизации**, так как за сечением 4—4 дальнейшее изменение распределения скоростей жидкости прекращается — поток стабилизируется.

2. Для иллюстрации особенностей течения вязкой жидкости рассмотрим следующий опыт (рис. 16.9). В бюретку *A* налит чистый глицерин, а поверх него — подкрашенный глицерин. Вначале кран *B* закрыт и между чистым и подкрашенным глицерином имеется горизонтальная граница раздела. Если затем кран *B* открыть, то глицерин начнет вытекать из нижнего конца бюретки и граница раздела будет искривляться вниз, приобретая вид, изображенный на рис. 16.9.



Рис. 16.9.

Это свидетельствует о том, что наибольшей скоростью обладают частицы глицерина, движущиеся по оси бюретки.

3. При небольших значениях скорости вязкой жидкости в трубе течение имеет ламинарный (слоистый) характер. В этом можно убедиться на опыте, вводя в поток жидкости на входе в стеклянную трубку тонкую струю подкрашенной жидкости. При ламинарном течении подкрашенная струя не перемешивается с остальной жидкостью. Постепенно увеличивая скорость v движения жидкости в трубе, можно убедиться в том, что начиная с некоторого значения $v_{кр}$ характер течения качественно изменяется. Подкрашенная струя быстро размывается за счет интенсивного перемешивания с остальной жидкостью, т. е. течение переходит из ламинарного в турбулентное. Этот переход, как показывает опыт, сопровождается изменением закона распределения скорости жидкости по сечению трубы. Вследствие интенсивного перемешивания скорость жидкости мало меняется почти по всему сечению, за исключением сравнительно небольшой области вблизи стенок трубы, где градиент скорости оказывается значительно большим, чем при ламинарном течении. Поэтому переход ламинарного течения в турбулентное приводит к значительному увеличению сил трения между жидкостью и стенками трубы.

4. Исследования показывают, что важнейшей характеристикой течения жидкостей служит безразмерная величина Re , которую называют числом Рейнольдса. Для течения жидкости в круглой трубе

$$Re = \frac{\langle v \rangle d \rho}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu}, \quad (16.11)$$

где d — диаметр трубы, $\langle v \rangle$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости ($\langle v \rangle = \frac{4V_{сек}}{\pi d^2}$, $V_{сек}$ — секундный объемный расход жидкости), ρ и η — плотность и динамический коэффициент вязкости жидкости, $\nu = \eta/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Переход ламинарного течения в турбулентное происходит при $Re > Re_{кр}$. Величина $Re_{кр}$ зависит от ряда факторов: шероховатости стенок трубы, способа осуществления ввода жидкости в трубу и т. д. Для гладких круглых труб $Re_{кр} \approx 2300$.

5. Рассмотрим закономерности стабилизированного ламинарного течения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе

радиуса R . Из условия симметрии очевидно, что скорость v жидкости зависит только от расстояния r между рассматриваемой точкой потока и осью трубы: $v = v(r)$.

Выделим мысленно слой жидкости, ограниченный цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$ и двумя поперечными сечениями 1—1' и 2—2' расстояние между которыми равно l (рис 16.10). Проведем ось X вдоль оси трубы в направлении течения жидкости. Силы внутреннего трения действуют как на внешнюю, так и на внутреннюю поверхности рассматриваемого слоя жидкости. По закону Ньютона для внутреннего трения

$$F_{\text{внутр}} = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l$$

где $2\pi r l$ — площадь внутренней поверхности слоя. Поскольку $\frac{dv}{dr} < 0$ (скорость v уменьшается при увеличении r , т. е. по мере приближения к стенкам трубы) $F_{\text{внутр}} > 0$, т. е. сила $F_{\text{внутр}}$ направлена вдоль положительного направления оси X и ускоряет движение цилиндрического слоя жидкости. Аналогично,

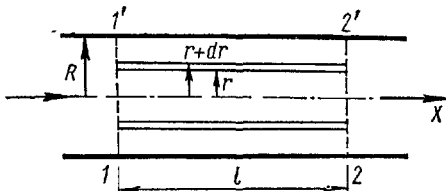


Рис. 16.10.

Аналогично,

$$F_{\text{внешн}} = \eta \left\{ \frac{dv}{dr} 2\pi r l + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} 2\pi r l \right) \right] dr \right\},$$

причем вектор $F_{\text{внешн}}$ направлен вдоль отрицательного направления оси X , т. е. сила $F_{\text{внешн}}$ тормозит движение цилиндрического слоя жидкости. Результирующая сила $dF_{\text{тр}}$ равна векторной сумме сил $F_{\text{внутр}}$ и $F_{\text{внешн}}$, которые направлены во взаимно противоположные стороны. Она совпадает по направлению с силой $F_{\text{внешн}}$, а ее проекция на ось X

$$dF_{\text{тр}x} = 2\pi \eta l \cdot dr \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi \eta l \cdot d \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

Кроме того, на рассматриваемый слой жидкости действует результирующая сила давления $dF_{\text{д}}$, направленная вдоль оси X и численно равная разности сил давления на торцевые поверхности этого слоя, имеющие площадь $2\pi r \cdot dr$. Если давление в сечении 1—1' равно p , то в сечении 2—2' оно равно

$$p + \frac{dp}{dx} l.$$

Проекция силы $dF_{\text{д}}$ на ось X

$$dF_{\text{д}x} = 2\pi r \cdot dr \left[p - \left(p + \frac{dp}{dx} l \right) \right] = -2\pi r \frac{dp}{dx} dr.$$

В случае установившегося течения жидкости силы $dF_{\text{тр}}$ и $dF_{\text{д}}$ взаимно уравновешиваются, т. е.

$$dF_{\text{тр}x} = -dF_{\text{д}x}.$$

Таким образом,

$$2\pi \eta l \cdot d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi l r \frac{dp}{dx} dr$$

или

$$d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} r \cdot dr.$$

Интегрируя, получаем

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{r^2}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx} + C_1.$$

При $r = 0$ скорость $v = v_{\text{макс}}$, поэтому

$$\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r=0} = 0, \quad C_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

Интегрируем повторно

$$v = \frac{r^2}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dx} + C_2.$$

При $r = R$ скорость $v = 0$ (прилегающий к стенке слой «прилипает» к ней). Поэтому постоянная интегрирования

$$C_2 = - \frac{R^2}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Следовательно, зависимость v от r имеет вид

$$v = - \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2) \frac{dp}{dx} \quad (16.12)$$

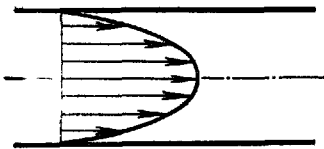


Рис. 16.11.

Таким образом, распределение скоростей по сечению трубы происходит по параболическому закону (рис. 16.11).

Найдем значение средней скорости течения жидкости:

$$\langle v \rangle = \frac{V_{\text{сек}}}{\pi R^2}$$

Так как

$$V_{\text{сек}} = \int_0^R v \cdot 2\pi r \cdot dr,$$

то

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R v r \cdot dr = - \frac{2}{4\eta R^2} \cdot \frac{dp}{dx} \left[R^2 \int_0^R r \cdot dr - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^R r^3 \cdot dr \right] = - \frac{1}{2\eta R^2} \cdot \frac{dp}{dx} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = - \frac{R^2}{8\eta} \frac{dp}{dx}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\langle v \rangle = - \frac{R^2}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (16.13)$$

Знак минус указывает на то, что статическое давление p убывает в направлении течения жидкости.

Объемный расход жидкости

$$V_{\text{сек}} = \pi R^2 \langle v \rangle = - \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (16.14)$$

Из уравнения неразрывности следует, что $V_{\text{сек}}$ не зависит от x , поэтому

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{8\eta V_{\text{сек}}}{\pi R^4} = \text{const.}$$

Следовательно,

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{\Delta p}{l}$$

где Δp — падение статического давления на участке трубы длиной l . Подставляя это выражение для $\frac{dp}{dx}$ в уравнение (16.14), получаем формулу Пуазейля:

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \quad (16.15)$$

6. Соотношение (16.15) используют для экспериментального определения коэффициента внутреннего трения жидкостей, Применяемый для этого прибор — **капиллярный вискозиметр** — изображен на рис. 16.12. Через трубку, соединенную с сосудом B , в вискозиметр заливают исследуемую жидкость с таким расчетом, чтобы уровень ее в обоих коленах был ниже отметки b . Через резиновую трубку C отсасывают воздух так, чтобы уровень жидкости в левом колене поднялся выше метки a . Если затем трубку C сообщить с атмосферой, то жидкость под влиянием силы тяжести начнет перетекать по капилляру K в сосуд B . Определяют время t , за которое через капилляр протечет вся жидкость, заполняющая объем V_{ab} сосуда A между метками a и b . Во избежание необходимости определения остальных величин, входящих в формулу (16.15), прибегают к относительному методу, т. е. повторяют опыт дважды: один раз с эталонной жидкостью, коэффициент вязкости η_0 которой известен, например, с водой, а другой раз с испытуемой жидкостью. Воспользуемся формулой (16.15)

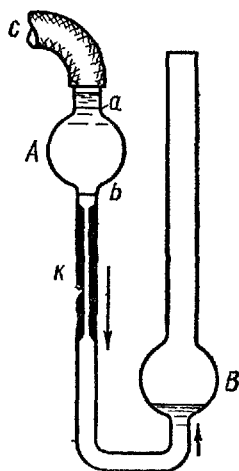


Рис 16.12.

для выражения результатов обоих измерений:

$$\frac{V_{ab}}{t_0} = \frac{\Delta p_0 \pi R^4}{8\eta_0 l} \quad \text{и} \quad \frac{V_{ab}}{t} = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l},$$

откуда

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\Delta p}{\Delta p_0} \cdot \frac{t}{t_0}.$$

Жидкость течет по капилляру под действием ее силы тяжести, поэтому падение давления на капилляре пропорционально плотности жидкости:

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{и} \quad \eta = \eta_0 \frac{\rho l}{\rho_0 t_0},$$

где ρ и ρ_0 — плотности испытуемой и эталонной жидкостей.

§ 16.4. Движение тел в жидкостях и газах

1. Вопрос о силовом взаимодействии между телом и набегающим на него потоком жидкости или газа, а также о силах, действующих на тела, движущиеся в жидкости или газе, имеет большое практическое значение в самых разнообразных задачах гидроаэродинамики. В соответствии с механическим принципом относительности задача о силовом взаимодействии между неподвижной жидкостью и телом, которое движется в ней равномерно и прямолинейно со скоростью \mathbf{u} , эквивалентна задаче о взаимодействии между неподвижным телом и набегающим на него стационарным потоком жидкости, скорость \mathbf{v}_0 которого вдали перед телом равна $-\mathbf{u}$.

2. Результирующая сила \mathbf{R} , действующая на тело со стороны потока жидкости, равна векторной сумме равнодействующих сил давления (\mathbf{F}_d) и сил трения ($\mathbf{F}_{тр}$), приложенных к поверхности тела:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{тр}.$$

Силу \mathbf{R} можно разложить на две составляющие: силу лобового сопротивления \mathbf{R}_x , совпадающую по направлению со скоростью \mathbf{v}_0 невозмущенного потока, и подъемную силу \mathbf{R}_y , направленную перпендикулярно \mathbf{v}_0 :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y. \quad (16.16)$$

Силы \mathbf{R} , \mathbf{R}_x и \mathbf{R}_y зависят от скорости потока, формы тела, его размеров и расположения относительно направления вектора \mathbf{v}_0 , а также от свойств жидкости. Если жидкость идеальная, то, как показывают расчеты, сила лобового сопротивления тела $\mathbf{R}_x = 0$, т. е. в идеальной жидкости тело должно двигаться без всякого сопротивления. Этот результат получил название парадокса Даламбера—Эйлера, так как он противоречит тому, что наблюдают в реальных опытах.