чае путь, пройденный точкой за время от 0 до t, $s = (\smile AB + \smile BM) > \smile AM$.

6. **Вектором перемещения** материальной точки за время от t_1 до t_2 называют вектор, проведенный из положения этой точки в момент t_1 в ее положение в момент t_2, т. е. приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени:

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1).$$

На рис. 1.4 показан вектор перемещения точки за время от 0 до t, равный $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)$. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории. Из того что перемещение — вектор, следует подтверждающийся на опыте **закон независимости движений:**

если точка одновременно участвует в нескольких движениях, то результирующее перемещение точки равно векторной сумме перемещений, совершаемых ею за то же время в каждом из движений порознь.

7. Для измерения длины пути, перемещения и других расстояний служат меры длины. За основную меру длины принимается м е т р (м).

Из определения механического движения следует, что, изучая движение, необходимо измерять и время. За единицу времени принимается с е к у н д а (с). Определения метра и секунды приведены в Приложении (§ 2).

§ 1.2. Скорость

1. Для характеристики движения материальной точки вводят векторную физическую величину — скорость, определяющую как быстроту движения, так и направление движения в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории MN (рис. 1.5) так, что в момент времени t она находится в точке M,

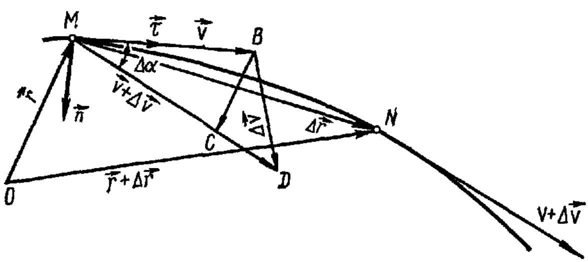

Рис. 1.5.

а в момент времени $t + \Delta t$ — в точке N. Радиусы-векторы точек M и N соответственно равны $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, а длина дуги MN равна Δs.

Вектором средней скорости $\mathbf{v}_{ср}$ точки в интервале времени от

t до $t+\Delta t$ называют отношение приращения $\Delta \mathbf{r}$ радиуса-вектора точки за этот интервал времени к его величине Δt:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

Вектор $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ направлен так же, как $\Delta \mathbf{r}$, т. е. вдоль хорды MN. Если в выражении (1.3) перейти к пределу, устремляя Δt к нулю, то мы получим выражение для **скорости** (ее часто называют **мгновенной скоростью**) материальной точки в момент t прохождения ее через точку M траектории:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1.4}$$

В процессе уменьшения величины Δt точка N неограниченно приближается к точке M, и хорда MN, поворачиваясь вокруг точки M, в пределе совпадает по направлению с касательной к траектории в точке M. Поэтому вектор $d\mathbf{r}$ и скорость $\mathbf{v}$ движущейся точки направлены по касательной к траектории в сторону движения.

Из математики известно, что предел отношения длины Δs дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице при $\Delta s \to 0$ Поэтому модуль малого (элементарного) приращения $d\mathbf{r}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ равен длине ds соответствующей ему дуги траектории:

$$|d\mathbf{r}| = ds.$$

Из этого соотношения и уравнения (1.4) следует, что численное значение скорости материальной точки равно первой производной от длины ее пути по времени.

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} \tag{1.5}$$

Интегрируя по t в пределах от t до $t+\Delta t$, найдем длину пути Δs, пройденного точкой за промежуток времени Δt:

$$\Delta s = \int_{t}^{t+\Delta t} v\,dt \tag{1.6}$$

2. Вектор $\mathbf{v}$ скорости материальной точки можно разложить на три составляющие, направленные вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \tag{1.4'}$$

где v_x, v_y и v_z — проекции вектора скорости на оси координат. Подставив в (1.4) значение (1.1) для радиуса-вектора материальной точки и выполнив почленное дифференцирование, получим

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{1.4''}$$

Из сопоставления выражений (1.4′) и (1.4″) следует, что проекции скорости материальной точки на оси прямоугольной декартовой системы координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.7}$$

Поэтому численное значение скорости

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{1.5′}$$

3. Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть направление вектора скорости $\mathbf{v}$ во время движения материальной точки не изменяется. Это означает, что точка движется по такой траектории, касательные к которой во всех ее точках имеют одно и то же направление. Таким свойством обладают только прямолинейные траектории. Значит, рассматриваемое движение — прямолинейное.

В том случае, если направление вектора скорости $\mathbf{v}$ материальной точки изменяется с течением времени, точка обязательно описывает криволинейную траекторию.

Если численное значение мгновенной скорости точки остается во время движения неизменным, то такое движение называют **равномерным.** В этом случае величину v в уравнении (1 6) можно вынести из-под знака интеграла.

$$\Delta s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v\Delta$$

Следовательно, при равномерном движении за произвольные равные промежутки времени материальная точка проходит пути равной длины

Если же за произвольные равные промежутки времени точка проходит пути разной длины, то численное значение ее мгновенной скорости с течением времени изменяется Такое движение называют **неравномерным.** В этом случае часто пользуются скалярной величиной $v_{ср}$, называемой средней путевой скоростью или просто средней скоростью неравномерного движения на данном участке Δs траектории. Она равна численному значению скорости такого равномерного движения, при котором на прохождение пути Δs затрачивается то же время Δt, что и при заданном неравномерном движении.

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Так как $\Delta s = |\Delta \mathbf{r}|$ только в случае прямолинейного движения с неизменной по направлению скоростью, то в общем случае

$$v_{ср} \neq |\mathbf{v}_{ср}|$$

4. Если материальная точка одновременно участвует в нескольких движениях, то ее результирующее элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, в соответствии с законом независимости движений, равно сумме элементарных перемещений, обусловленных каждым из этих движений в отдельности. Поэтому скорость $\mathbf{v}$ результирующего движения может быть найдена по обычному правилу сложения векторов. Она равна геометрической сумме скоростей $\mathbf{v}_i$ всех тех (n) движений, в которых участвует материальная точка **(закон сложения скоростей)**:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

§ 1.3. Ускорение

1. В движениях, с которыми чаще всего приходится иметь дело, вектор скорости изменяется как по численному значению (модуля), так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости движения вводится понятие ускорения.

Пусть за время Δt движущаяся точка перешла из положения M в положение N (см. рис. 1.5), и вектор ее скорости $\mathbf{v}$ изменился на $\Delta\mathbf{v}$. Перенесем вектор $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ из точки N в точку M ($\overrightarrow{MD}$). Очевидно, что вектор $\Delta\mathbf{v} = \overrightarrow{BD}$.

Средним ускорением неравномерного движения в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называют вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt:

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ совпадает по направлению с вектором изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$.

Ускорением, или **мгновенным ускорением**, точки в момент времени t называют векторную величину $\mathbf{a}$, равную пределу, к которому стремится среднее ускорение этой точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ при неограниченном уменьшении Δt:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{1.8}$$

Из (1.4) следует, что

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{1.8'}$$

Таким образом, ускорение точки равно первой производной от ее скорости $\mathbf{v}$ или, что то же самое, второй производной от ее радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по времени.

2. Вектор $\mathbf{a}$ ускорения материальной точки можно разложить на