4. Если материальная точка одновременно участвует в нескольких движениях, то ее результирующее элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, в соответствии с законом независимости движений, равно сумме элементарных перемещений, обусловленных каждым из этих движений в отдельности. Поэтому скорость $\mathbf{v}$ результирующего движения может быть найдена по обычному правилу сложения векторов. Она равна геометрической сумме скоростей $\mathbf{v}_i$ всех тех (n) движений, в которых участвует материальная точка (**закон сложения скоростей**):

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

§ 1.3. Ускорение

1. В движениях, с которыми чаще всего приходится иметь дело, вектор скорости изменяется как по численному значению (модуля), так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости движения вводится понятие ускорения.

Пусть за время Δt движущаяся точка перешла из положения M в положение N (см. рис. 1.5), и вектор ее скорости $\mathbf{v}$ изменился на $\Delta\mathbf{v}$. Перенесем вектор $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ из точки N в точку M ($\overrightarrow{MD}$). Очевидно, что вектор $\Delta\mathbf{v} = \overrightarrow{BD}$.

Средним ускорением неравномерного движения в интервале времени от t до $t+\Delta t$ называют вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt:

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ совпадает по направлению с вектором изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$.

Ускорением, или **мгновенным ускорением**, точки в момент времени t называют векторную величину $\mathbf{a}$, равную пределу, к которому стремится среднее ускорение этой точки в промежутке времени от t до $t+\Delta t$ при неограниченном уменьшении Δt:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (1.8)$$

Из (1.4) следует, что

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \qquad (1.8')$$

Таким образом, ускорение точки равно первой производной от ее скорости $\mathbf{v}$ или, что то же самое, второй производной от ее радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по времени.

2. Вектор $\mathbf{a}$ ускорения материальной точки можно разложить на

три составляющие, направленные вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = \dot{a}_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \tag{1.9}$$

где a_x, a_y и a_z — проекции вектора ускорения на оси координат. Из (1.9), (1.4′) и (1.4″) видно, что

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \tag{1.9′}$$

Следовательно, проекции ускорения материальной точки на оси прямоугольной декартовой системы координат равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости этой точки или, что то же самое, вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{и} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1.10}$$

Численное значение ускорения

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \tag{1.10′}$$

3. Вектор **a** ускорения материальной точки характеризует быстроту изменения ее скорости **v** как по численному значению, так и по направлению. Оказывается, что вектор **a** можно разложить на две составляющие так, чтобы одна из них характеризовала быстроту изменения только численного значения (модуля) скорости, а вторая — только направления скорости. Такое разложение возможно при любом виде движения точки. Ради простоты мы докажем его справедливость на примере плоского движения материальной точки вдоль участка MN ее траектории (см. рис. 1.5). Ускорение в точке M

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{BD}}{\Delta t}.$$

Отложим на прямой MD отрезок MC, равный MB. Тогда $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ и

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{BC}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{CD}}{\Delta t}. \tag{1.11}$$

Проведем в точке M два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$, лежащих в плоскости траектории (см. рис. 1.5). Вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки, т. е. в направлении ее скорости **v**. Вектор **n** проведен в сторону вогнутости траектории. Его называют единичным вектором **главной нормали** к траектории в точке M.

Из рис. 1.5 видно, что модули векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ и их проекции на касательную и главную нормаль соответственно равны:

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = 2v \sin\frac{\Delta\alpha}{2}, \quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = CD = \Delta v,$$

$$BC_\tau = BC\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = 2v\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}, \quad BC_n = BC\cos\frac{\Delta\alpha}{2} = v\sin\Delta\alpha,$$

$$CD_\tau = CD\cos\Delta\alpha = \Delta v\cos\Delta\alpha, \quad CD_n = CD\sin\Delta\alpha = \Delta v\sin\Delta\alpha.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\tau}\, 2v\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2} + \mathbf{n}\, v\sin\Delta\alpha,$$

$$\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{\tau}\,\Delta v\cos\Delta\alpha + \mathbf{n}\,\Delta v\sin\Delta\alpha.$$

При вычислении пределов в выражении (1.11) точка M предполагается фиксированной на траектории, так что значения v, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ при $\Delta t \to 0$ остаются постоянными. С другой стороны, если $\Delta t \to 0$, то $\Delta v \to 0$ и $\Delta\alpha \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{BC}}{\Delta t} = \mathbf{n} v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t} = \mathbf{n} v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{n},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{CD}}{\Delta t} = \boldsymbol{\tau}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\cos\Delta\alpha = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \tag{1.11'}$$

где $\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$ — касательная и нормальная составляющие вектора ускорения:

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{a}_n = v\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{n}, \tag{1.13}$$

называемые соответственно **тангенциальным (касательным)** и **нормальным ускорениями** материальной точки

4. Из выражения (1.12) следует, что *тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения численного значения скорости материальной точки*. Проекция вектора $\mathbf{a}_\tau$ на направление скорости движения точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{1.12'}$$

При равномерном движении $a_\tau = 0$. Если $a_\tau > 0$, то движение называют **ускоренным**, если $a_\tau < 0$ — **замедленным.** Наконец, если $a_\tau = \text{const} \neq 0$, то движение называют **равнопеременным:** за равные промежутки времени численное значение скорости изменяется на одну и ту же величину.

Производная $d\alpha/dt$, входящая в выражение (1.13) для $\mathbf{a}_n$, выражает быстроту изменения направления движення материальной точки. Поэтому *нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости материальной точки.* Если движение прямолинейное, то $a_n = 0$

За малое время dt материальная точка перемещается из точки M вдоль траектории на расстояние ds. Малый участок траектории ds можно рассматривать как малую дугу окружности радиуса R, соответствующую центральному углу $d\alpha$. Эту окружность называют соприкасающейся. Она представляет собой предельное положение окружности, проведенной через три точки траектории M_1, M и M_2 (точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны от M), когда $M_1 \to M$ и $M_2 \to M$. Ее радиус R и центр называют соответственно **радиусом кривизны и центром кривизны траектории** в точке M. Центр кривизны лежит на главной нормали, проведенной в точке M, причем единичный вектор $\mathbf{n}$ главной нормали направлен от точки M к центру кривизны

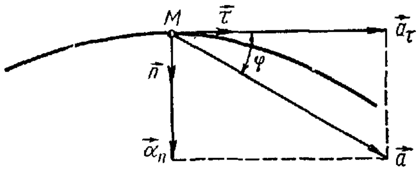

Рис. 1.6.

Так как $ds = R\,d\alpha$, то $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R}$ и

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \qquad (1.13')$$

Проекция $\mathbf{a}_n$ на направление $\mathbf{n}$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (1.13'')$$

т. е. проекция не может быть отрицательной Следовательно, вектор нормального ускорения направлен по главной нормали к центру кривизны траектории. Поэтому нормальное ускорение часто называют также **центростремительным ускорением.**

Векторы $\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$ взаимно перпендикулярны (рис. 1.6), так что модуль ускорения $\mathbf{a}$ материальной точки равен

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \qquad (1.14)$$

Направление ускорения определяется углом φ между векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{a}$. Из рис. 1.6 видно, что

$$\cos\varphi = \frac{a_\tau}{a}. \qquad (1.14')$$