Пользуясь этими формулами, нужно помнить, что в них a — не модуль вектора $\mathbf{a}$, а алгебраическая величина ускорения: при равноускоренном движении $a = |\mathbf{a}| > 0$, а при равнозамедленном движении $a = -|\mathbf{a}| < 0$.

Если $v_0 = 0$, то, как видно из (1.16′) и (1.18′), скорость материальной точки после прохождения пути s в равноускоренном прямолинейном движении

$$v = \sqrt{2as}. \qquad (1.18')$$

В качестве примера прямолинейного равноускоренного движения укажем на свободное падение тел без начальной скорости. Опыты Г. Галилея (XVI в.), а также все последующие более точные опыты показали, что численное значение g ускорения при свободном падении одинаково для всех тел и зависит только от высоты над уровнем моря и географической широты места проведения опыта. На широте Москвы и уровне моря $g = 9{,}8156$ м/с^2.

3. Наиболее простой вид криволинейного движения — равномерное движение материальной точки по окружности. Численное значение вектора скорости в этом движении остается неизменным ($a_\tau = 0$), но направление его все время изменяется ($\mathbf{a}_n \neq 0$), причем по уравнению (1.13″)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \text{const}.$$

§ 1.5. Кинематика абсолютно твердого тела

1. В этом параграфе мы рассмотрим кинематические характеристики двух простейших типов движения абсолютно твердого тела—поступательного и вращательного. Движение твердого тела называют **поступательным**, если любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается, оставаясь параллельной ее первоначальному направлению (рис. 1.7). Поступательно движутся относительно земли, например, кабина лифта, резец токарного станка, пассажирские кабины «колеса обозрения», стрелка компаса при любом перемещении его корпуса в горизонтальной плоскости и т. д.

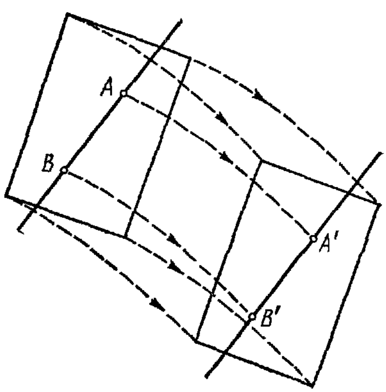

Рис. 1.7.

При поступательном движении тела траектории AA' и BB' любых двух его точек A и B (рис. 1.7) совершенно идентичны: их можно полностью совместить путем параллельного переноса вдоль прямой AB. Поэтому приращения радиусов-векторов всех точек тела за любой произвольно выбранный промежуток времени одинаковы. Следовательно, в любой момент времени все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения, а кинематическое рассмотрение поступательного движения абсолютно твердого тела сводится к изучению движения любой из его точек.

2. Если в процессе движения твердого тела (рис. 1.8) две его точки A и B остаются неподвижными, то и любая точка C тела, находящаяся на прямой AB, также должна оставаться неподвижной. В противном случае расстояния AC и BC должны были бы изменяться, что противоречило бы предположению об абсолютной твердости тела. Поэтому движение твердого тела, при котором две его точки A и B остаются неподвижными, называют **вращением тела вокруг неподвижной оси,** а неподвижную прямую AB называют **осью вращения тела.**

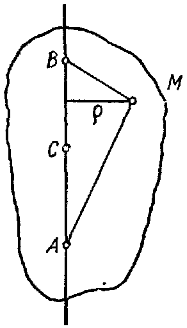

Рис. 1.8.

Рассмотрим произвольную точку M тела, не лежащую на оси вращения AB. При вращении твердого тела расстояния MA, MB и расстояние ρ от точки M до оси вращения должны оставаться неизменными. Таким образом, все точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости перпендикулярны к этой оси. Вращение вокруг неподвижной оси совершают, например, роторы турбин, электрических двигателей и генераторов, коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания и т. д.

Движение абсолютно твердого тела, закрепленного в одной неподвижной точке, называют **вращением тела вокруг неподвижной точки — центра вращения.** Такое движение абсолютно твердого тела в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через центр вращения и называемой **мгновенной осью вращения тела.** Положение мгновенной оси относительно неподвижной системы отсчета и самого тела с течением времени может изменяться.

3. При вращательном движении, в отличие от поступательного, скорости $\mathbf{v}$ разных точек тела неодинаковы. Поэтому скорость $\mathbf{v}$ какой-либо точки вращающегося тела не может служить кинематической характеристикой движения всего тела.

Пусть O — центр вращения тела, а OO' — неподвижная (или мгновенная) ось вращения. Положение произвольной точки M тела (рис. 1.9) будем задавать с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из центра O. Из рис. 1.9 видно, что

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \overrightarrow{OO'}, \qquad (1.19)$$

где $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{O'M}$ — радиус-вектор, проведенный в точку M из центра O' дуги окружности, по которой движется точка M. За малое время

dt вектор $\boldsymbol{\rho}$ поворачивается в плоскости, перпендикулярной оси OO', на малый угол $d\varphi$. На такой же угол поворачивается за время dt радиус-вектор любой другой точки тела, так как в противном случае расстояния между этими точками должны были бы изменяться. Таким образом, угол поворота $d\varphi$ характеризует перемещение всего вращающегося тела за малый промежуток времени. Удобно ввести вектор $d\boldsymbol{\varphi}$ **элементарного** (малого) **поворота тела**, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения OO' так, чтобы из его конца поворот тела был виден происходящим против часовой стрелки (см. рис. 1.9). Направление этого вектора совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается вместе с телом, т. е. подчиняется **правилу буравчика**.

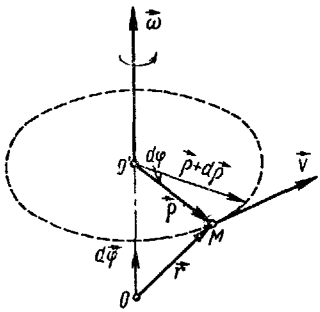

Рис. 1.9.

Можно показать, что при совершении телом последовательно двух элементарных поворотов ($d\boldsymbol{\varphi}_1$, а затем $d\boldsymbol{\varphi}_2$) результирующее перемещение тела эквивалентно одному повороту $d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2$. Таким образом, элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов, т. е. их действительно можно рассматривать как векторы.

4. **Угловой скоростью** тела называют вектор $\boldsymbol{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота φ по времени и направленный вдоль оси вращения по правилу буравчика, т. е. так же как вектор элементарного поворота $d\boldsymbol{\varphi}$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}. \tag{1.20}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ характеризует направление и быстроту вращения тела вокруг оси. Если $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$, то движение тела называют равномерным вращением вокруг неподвижной оси.

Скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки M тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, часто называют **линейной скоростью** этой точки. За время dt точка M проходит по дуге окружности радиуса ρ путь $ds = v\,dt = \rho d\varphi$, так что

$$v = \rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho\omega \tag{1.21}$$

Из рис. 1.9 видно, что вектор $\mathbf{v}$ направлен перпендикулярно и к $\boldsymbol{\omega}$ и к $\boldsymbol{\rho}$ в ту же сторону, что и векторное произведение $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]$. Так как, кроме того, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\rho}$ взаимно перпендикулярны, то $|[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]| = \rho\omega = v$.

Следовательно,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]. \tag{1.22}$$

Подставляя значение $\boldsymbol{\rho}$ из (1.19) и учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\overrightarrow{OO'}$ равно нулю, получим

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]. \tag{1.22'}$$

Очевидно, что в случае вращения тела вокруг неподвижной оси за начало координат, из которого проводят радиусы-векторы $\mathbf{r}$, можно выбрать любую точку оси вращения.

5. Наряду с угловой скоростью вращения тела пользуются понятиями периода и частоты вращения. **Периодом вращения** T называют промежуток времени, в течение которого тело, равномерно вращаясь с угловой скоростью ω, совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$. **Частотой вращения** n называют число оборотов, совершаемых телом за 1 с при равномерном вращении с угловой скоростью ω. Связь между ω, T и n имеет вид

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \tag{1.23}$$

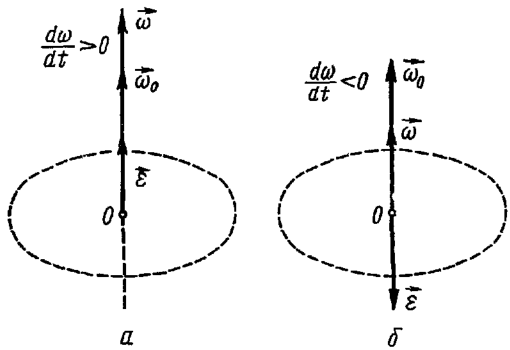

Рис. 1.10.

6. Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие углового ускорения. **Угловым ускорением** называют вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, равный первой производной по времени от угловой скорости:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{1.24}$$

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси изменение вектора $\boldsymbol{\omega}$ обусловлено только изменением его численного значения. При этом вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения (рис. 1.10) в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\omega}$, при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$ и в противоположную сторону — при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$.

Направим ось OZ вдоль неподвижной оси вращения, тогда проекция вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ на эту ось

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \tag{1.24'}$$

Если единичный вектор $\mathbf{k}$ оси OZ направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{\omega}$, то $\omega_z = |\boldsymbol{\omega}| = \omega$ и

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}.$$

Часто, ради упрощения, эту формулу записывают в виде

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (1.24'')$$

Здесь ε не модуль вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, а алгебраическая величина: при ускоренном вращении $\varepsilon = |\boldsymbol{\varepsilon}| > 0$, а при замедленном вращении $\varepsilon = -|\boldsymbol{\varepsilon}| < 0$.

7. Выразим тангенциальное и нормальное ускорения произвольной точки M тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, через угловую скорость и угловое ускорение тела:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\rho) = \rho\frac{d\omega}{dt} = \rho\varepsilon; \qquad (1.25)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho = \frac{4\pi^2}{T^2}\rho = 4\pi^2 n^2\rho. \qquad (1.26)$$

Из рис. 1.11 и уравнения (1.25) следует, что вектор тангенциального ускорения $\mathbf{a}_\tau$ равен векторному произведению вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ на радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ или на радиус-вектор $\mathbf{r}$, соединяющий произвольную точку на оси вращения с точкой M:

$$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}] = [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}]. \qquad (1.27)$$

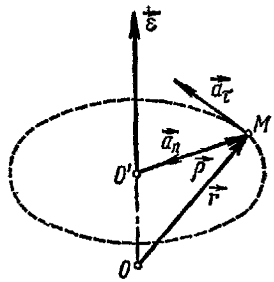

Рис. 1.11.

Вектор $\mathbf{a}_n$ нормального ускорения направлен к оси вращения, т. е. в сторону, противоположную $\boldsymbol{\rho}$:

$$\mathbf{a}_n = -\frac{v^2}{\rho}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} = -\frac{v^2}{\rho^2}\boldsymbol{\rho}. \qquad (1.28)$$

8. В заключение рассмотрим формулы для простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

а) равномерное вращение:

$$\varepsilon = 0, \ \omega = \mathrm{const}, \ \varphi = \omega t;$$

б) равнопеременное вращение вокруг оси OZ:

$$\varepsilon_z = \mathrm{const}, \quad \omega_z = \omega_{OZ} + \varepsilon_z t, \quad \varphi = \omega_{OZ}\, t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2},$$

где ω_{OZ} — проекция на ось OZ начальной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}_0$.

9. Поступательное и вращательное движения твердого тела являются лишь простейшими типами его движения. В общем случае твердое тело может двигаться весьма сложным образом. Сложными являются, например, движения шатуна в двигателе внутреннего сгорания, самолета, выполняющего фигуры высшего пилотажа и др. Однако в теоретической механике доказывается, что любое сложное движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

Понятия поступательного и вращательного движений, как видно из их определений, неприменимы к материальной точке. Действительно, точка не имеет размеров, так что говорить о ее вращении просто бессмысленно. Поэтому представление реального тела в виде материальной точки возможно только в тех случаях, когда вращение тела не играет сколько-либо существенной роли. В частности, это условие выполняется для твердого тела, движущегося поступательно

Вопросы для повторения

1 Перечислите основные кинематические характеристики движения точки, а также поступательного и вращательного движений твердого тела и дайте их определения Укажите связи между ними

2 Почему в общем случае нельзя написать: $a = \frac{dv}{dt}$ или $a = \frac{d^2s}{dt^2}$? Для какого движения эта запись справедлива?

3 Какое движение называют равнопеременным?

4 Каков смысл нормального и тангенциального ускорений точки? Как направлены эти ускорения и чему они численно равны (вывод)?

Примеры решения задач

Задача 1 1 Камень брошен с вышки со скоростью 29,4 м/с в горизонтальном направлении Найти радиус кривизны траектории камня в точке, где он будет через 4с после начала движения Сопротивлением воздуха пренебречь

Дано

$v_0 = 29{,}4$ м/с
$t = 4$ с

R — ?

Решение

Для определения радиуса кривизны траектории в заданной точке воспользуемся формулой (1 13″) для нормального ускорения $a_n = \frac{v^2}{R}$, откуда

$$R = \frac{v^2}{a_n} \quad (a)$$

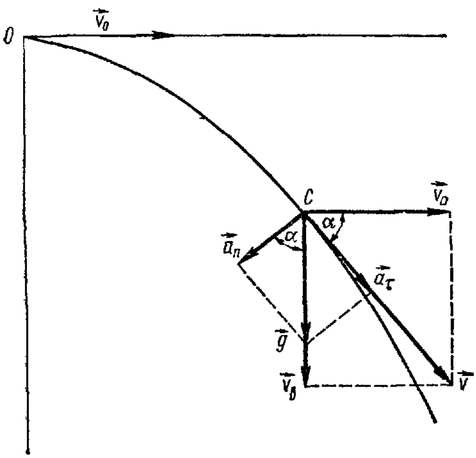

Рис. 1.12.

Камень участвует в двух взаимно перпендикулярных движениях. равномерном движении по горизонтали со скоростью $\mathbf{v}_г = \mathbf{v}_0$ и свободном падении со скоростью $\mathbf{v}_в = \mathbf{g}t$ (рис. 1.12). Поэтому его скорость $\mathbf{v}$ в точке C (через t с после начала движения) будет

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t,$$

причем численное значение вектора $\mathbf{v}$ равно

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2},$$

а его направление определяется углом α Из рис. 1.11 видно, что