Понятия поступательного и вращательного движений, как видно из их определений, неприменимы к материальной точке. Действительно, точка не имеет размеров, так что говорить о ее вращении просто бессмысленно. Поэтому представление реального тела в виде материальной точки возможно только в тех случаях, когда вращение тела не играет сколько-либо существенной роли. В частности, это условие выполняется для твердого тела, движущегося поступательно

Вопросы для повторения

1 Перечислите основные кинематические характеристики движения точки, а также поступательного и вращательного движений твердого тела и дайте их определения Укажите связи между ними

2 Почему в общем случае нельзя написать: $a = \frac{dv}{dt}$ или $a = \frac{d^2s}{dt^2}$? Для какого движения эта запись справедлива?

3 Какое движение называют равнопеременным?

4 Каков смысл нормального и тангенциального ускорений точки? Как направлены эти ускорения и чему они численно равны (вывод)?

Примеры решения задач

Задача 1 1 Камень брошен с вышки со скоростью 29,4 м/с в горизонтальном направлении Найти радиус кривизны траектории камня в точке, где он будет через 4с после начала движения Сопротивлением воздуха пренебречь

Дано

$v_0 = 29{,}4$ м/с
$t = 4$ с

R — ?

Решение

Для определения радиуса кривизны траектории в заданной точке воспользуемся формулой (1 13″) для нормального ускорения $a_n = \frac{v^2}{R}$, откуда

$$R = \frac{v^2}{a_n} \qquad (a)$$

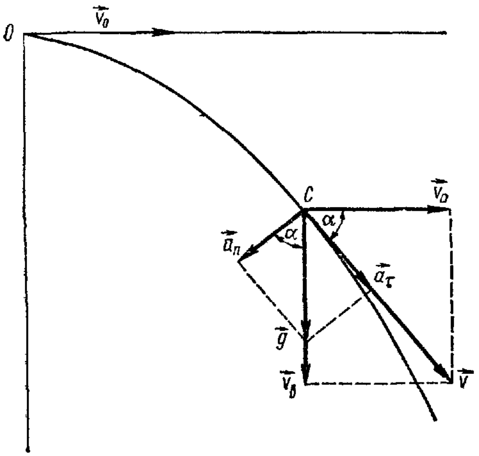

Рис. 1.12.

Камень участвует в двух взаимно перпендикулярных движениях. равномерном движении по горизонтали со скоростью $\mathbf{v}_г = \mathbf{v}_0$ и свободном падении со скоростью $\mathbf{v}_в = \mathbf{g}t$ (рис. 1.12). Поэтому его скорость $\mathbf{v}$ в точке C (через t с после начала движения) будет

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t,$$

причем численное значение вектора $\mathbf{v}$ равно

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2},$$

а его направление определяется углом α Из рис. 1.11 видно, что

$$\cos\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \cdot$$

Нормальное ускорение a_n, как видно из рисунка, численно равно

$$a_n = g \cdot \cos\alpha = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \cdot$$

Подставив найденные для v и a_n выражения в формулу (а), получим

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}{gv_0},$$

или

$$R = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)^{3/2}}{gv_0}$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

1) проверка размерности результата:

$$[R] = \frac{[v_0]^3}{[g]\,[v_0]} = \frac{[v^2]}{[g]} = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = L,$$

так как

$$[g] \cdot [t] = LT^{-2} \cdot T = LT^{-1} = [v];$$

2) вычисления:

$$R = \frac{\left[(29,4)^2 + (9,81)^2 \cdot 4^2\right]^{3/2}}{9,81 \cdot 29,4}\ \text{м} = 409\ \text{м}.$$

Задача 1.2. Маховик приведен в равноускоренное вращательное движение с угловым ускорением 314 рад/с². Найти угловую скорость маховика через 16 полных оборотов.

Дано

$\varepsilon = 314$ рад/с
$N = 16$
$\omega_0 = 0$

ω — ?

Решение

Из уравнений для равнопеременного вращательного движения без начальной скорости имеем

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \text{ и } \omega = \varepsilon t,$$

или

$$t = \sqrt{\frac{2\varphi}{\varepsilon}} \text{ и } \omega = \varepsilon t.$$

Угол поворота $\varphi = 2\pi N$, поэтому

$$\omega = 2\sqrt{\pi N \varepsilon}$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

1) проверка размерности результата:

$$[\omega] = [N]^{1/2}\,[\varepsilon]^{1/2} = T^{-1},$$

2) вычисления;

$$\omega = 2\sqrt{3{,}14 \cdot 16 \cdot 314}\ \text{рад/с} = 251\ \text{рад/с}.$$

Задача 1.3. Колесо диаметром 0,07 м, насаженное на горизонтальную ось, катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Центр колеса движется со скоростью 0,168 м/с и описывает окружность радиусом 0,12 м. Найти величину результирующей угловой скорости колеса и угол ее наклона к вертикали.

Дано

$d = 0{,}07$ м,
$v = 0{,}168$ м/с,
$R = 0{,}12$ м

ω — ?
α — ?

Решение

Пусть колесо катится так, что сверху его движение видно происходящим по часовой стрелке (рис. 1.13). Колесо одновременно участвует в двух движениях: вращении вокруг оси OO_1 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ и вращении вокруг собственной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, направленной вдоль радиуса от оси OO_1. Вектор результирующей угловой скорости равен сумме $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Так как векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ взаимно перпендикулярны, то

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \qquad (а)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (б)$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_2$ численно равна отношению линейной скорости к радиусу вращения:

$$\omega_2 = \frac{v}{R}. \qquad (в)$$

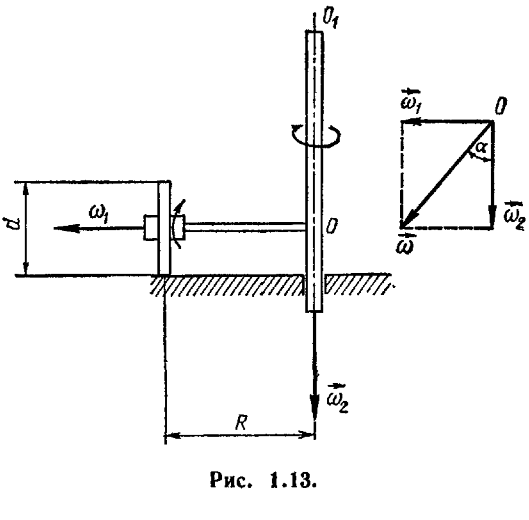

Рис. 1.13.

Численное значение угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ найдем из условия, что колесо катится по плоскости без скольжения. Отсутствие скольжения означает, что линейная скорость $\mathbf{v}_1$ точки колеса, касающейся плоскости, равна скорости точек плоскости, т. е. равна нулю. Скорость $\mathbf{v}_1$ численно равна разности линейной скорости v, соответствующей вращению колеса вокруг оси OO_1, и линейной скорости $\omega_1 \cdot \frac{d}{2}$, соответствующей вращению колеса вокруг собственной оси:

$$v_1 = v - \frac{\omega_1 \cdot d}{2} = 0.$$

Поэтому

$$\omega_1 = \frac{2v}{d}. \tag{г}$$

Заменив в формулах (а) и (б) ω_1 и ω_2 выражениями (в) и (г), получим окончательно

$$\omega = \sqrt{\frac{4v^2}{d^2} + \frac{v^2}{R^2}} = \frac{v}{dR}\sqrt{4R^2 + d^2}$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2R}{d}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

1) проверка размерности результата:

$$[\omega] = \frac{[v]}{[d]\,[R]} \cdot [R] = \frac{[v]}{[d]} = \frac{LT^{-1}}{L} = T^{-1};$$

2) вычисления:

$$\omega = \frac{0,168}{0,07 \cdot 0,12}\sqrt{4 \cdot 0\ 0144 + 0,0049}\ \text{рад/с} = 5\ \text{рад/с},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2 \cdot 0,12}{0,07} = 73°45'.$$