чи. Их значения должны быть такими, чтобы реакции связей совместно с активными силами вызывали такое движение «освобожденного» тела, которое полностью согласуется с ограничениями, накладываемыми связями на рассматриваемое несвободное тело. Так, при скатывании или соскальзывании шарика по наклонной плоскости на него действуют сила тяжести и реакция плоскости, которую обычно бывает удобно представить в виде суммы двух составляющих — нормальной к плоскости (нормальная реакция) и касательной (сила трения). Под действием силы тяжести и реакции плоскости шарик должен двигаться так, чтобы его центр все время находился на одном и том же расстоянии от плоскости, равном радиусу шарика. Если же шарик скатывается без проскальзывания, то, кроме того, должно выполняться еще одно условие: скорость точки касания шарика о плоскость должна быть равна скорости соответствующей точки плоскости.

Принцип освобождаемости непосредственно вытекает из самого понятия силы, как меры механического действия тел друг на друга. Ведь тела, осуществляющие связи, именно потому и ограничивают движение рассматриваемого тела, что действуют на него с некоторыми силами — реакциями связей.

В дальнейшем, рассматривая закономерности движения тел под действием сил, мы всегда будем пользоваться принципом освобождаемости. Иными словами, мы всегда будем считать, не оговаривая этого особо, что рассматриваемое тело свободно, а под действующими на него силами будем понимать совокупность как всех активных сил, так и всех реакций связи, если в действительности тело несвободно.

§ 2.3. Масса. Второй закон Ньютона

1. Основная задача динамики заключается в установлении законов изменения механического движения тел под влиянием приложенных к ним сил. Опыты показывают, что под действием силы **F** свободное тело изменяет скорость своего поступательного движения, приобретая ускорение **a**. При этом выполняется следующий закон[1]: *ускорение тела прямо пропорционально вызывающей его силе и совпадает с ней по направлению*, т. е.

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{F}, \qquad (2.2)$$

где k_1 — положительный коэффициент пропорциональности, постоянный для каждого конкретного тела, но, вообще говоря, неодинаковый для разных тел. Кроме того величина k_1 зависит, конечно, от выбора единиц измерения силы и ускорения.

2. Из соотношения (2.2) следует, что тела, действительно, обладают свойством инертности. Ведь именно благодаря своей инертности тело приобретает под влиянием силы к о н е ч н о е по величине ускорение, т. е. изменяет скорость своего поступательного движения не мгновенно, а лишь п о с т е п е н н о.

[1] При скоростях движения тел $v \ll c$, где c — скорость света в вакууме.

В качестве меры инертности тела в поступательном движении вводят положительную скалярную величину m, называемую **массой тела.** Чем меньше инертность тела, тем большее ускорение оно должно приобретать под действием какой-либо определенной силы (например, равной единице силы). Следовательно, коэффициент k_1 в формуле (2.2) обратно пропорционален массе тела: $k_1 = k/m$, и

$$\mathbf{a} = k\frac{\mathbf{F}}{m},$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий только от выбора единиц измерения силы, массы и ускорения. Из курса физики средней школы известно, что если все эти величины измеряют в единицах одной системы (системы единиц приведены в Приложении, стр. 368), то $k = 1$ и

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \qquad (2.3)$$

Таким образом, *ускорение тела прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела.*

3. Из постоянства для данного тела коэффициента k_1 следует, что *масса тела — величина постоянная,* не зависящая ни от состояния движения тела, ни от его местоположения в пространстве, ни от того, действуют на него другие тела или нет. Поэтому для сравнения масс m_1 и m_2 двух тел достаточно измерить численные значения a_1 и a_2 ускорений, приобретаемых этими телами под действием одной и той же силы. Из (2.3) следует, что

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если взять N совершенно одинаковых тел с массами m каждое и жестко скрепить их друг с другом, то, как показывают опыты, сила $\mathbf{F}$ сообщает такому составному телу ускорение, в N раз меньшее, чем каждому из тел порознь. Следовательно, масса составного тела равна Nm. Иначе говоря, *масса — величина аддитивная*: масса тела равна сумме масс всех частей этого тела. Например, масса тела равна сумме масс всех материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить. Масса системы тел равна сумме масс всех тел, входящих в состав системы.

Обычно массу тела определяют путем взвешивания на рычажных весах. Этот метод основывается на следующей экспериментально установленной закономерности для свободного падения тел: в одной и той же точке земного шара все тела свободно падают с одинаковым ускорением $\mathbf{g}$. Свободное падение вызывается действием силы тяжести тела $\mathbf{P}$, так что по закону (2.3)

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{P}}{m}. \qquad (2.4)$$

Поэтому отношение масс двух тел равно отношению их сил тяжести, измеренных в одном и том же месте:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2}{P_1}.$$

При взвешивании тела на рычажных весах сила тяжести тела и сила тяжести гири (или набора гирь) уравновешиваются, так что масса тела и масса гирь должны быть равны. Таким образом, зная массы гирь, можно измерять массы тел, взвешивая их на рычажных весах.

За основную единицу массы, называемую **килограммом** (кг), принимают массу эталонного тела, хранящегося в Международном бюро мер и весов.

4. Инертность тел можно продемонстрировать с помощью ряда опытов. Рассмотрим два из них.

Опыт 1. Стеклянную колбу ставят на край листа бумаги, лежащей на горизонтальной поверхности стола. Затем, взявшись за другой край листа, медленно тянут его вдоль стола. При этом бумага вместе со стоящей на ней колбой перемещается по столу. Если же бумагу потянуть рывком, то она выдергивается из-под колбы, которая остается стоять на столе. Различное поведение колбы в этих двух случаях непосредственно связано с ее инертностью. Для приведения колбы в движение относительно стола с ускорением $\mathbf{a}$ к ней нужно приложить горизонтальную силу $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, где m — масса колбы. Роль этой силы может играть только сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ между колбой и листом бумаги. Однако $F_{тр} \leqslant f_0 mg$, где f_0 — коэффициент трения. Поэтому, если ускорение a_1, сообщаемое листу бумаги, невелико ($a_1 < f_0 g$), то сила трения достаточна для сообщения колбе такого же ускорения, так что колба движется вместе с бумагой. Если же ускорение a_1 листа бумаги очень велико, то колба под действием силы трения приобретает ускорение $a = f_0 g \ll a_1$. За очень малое время, в течение которого происходит выдергивание бумаги из-под колбы, последняя не успевает практически сдвинуться с места.

Опыт 2. Два кольца одинакового размера, вырезанные из ватманской бумаги, подвешивают на одном уровне на горизонтальные стержни, укрепленные в двух штативах. В вырезы колец вставляют тонкую и длинную деревянную планку так, что она своими концами опирается на кольца и висит горизонтально. Затем медленно нажимают массивным металлическим стержнем на середину планки, при этом одно из двух колец рвется, и планка падает на пол. Вновь подвешивают деревянную планку на бумажных кольцах и металлическим стержнем наносят резкий удар по середине планки. В этом случае планка ломается посредине, а бумажные кольца остаются целыми, так как благодаря инертности планки ее концы не успевают за короткое время удара сместиться на столько, чтобы порвать кольца.

5. Уравнение (2.3) описывает изменение движения протяженного тела под действием силы только при условии, что тело не деформируется и движется поступательно. В противном случае ускорения разных

точек тела неодинаковы, и изменение движения всего тела нельзя описать с помощью единого ускорения $\mathbf{a}$.

Материальная точка, по самому смыслу этого понятия, не может ни деформироваться, ни вращаться. Для нее, в отличие от протяженного тела, уравнение (2.3) должно всегда полностью описывать изменение движения под влиянием силы. Поэтому уравнение (2.3) обычно называют **основным уравнением динамики материальной точки.** Оно показывает, что *ускорение материальной точки прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки.*

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$, то, как показывает опыт, ускорение точки

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

где $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ — результирующая сила. Иначе говоря, и в динамике силы подчиняются обычному закону сложения векторов. Подставив значение $\mathbf{F}$ в формулу для $\mathbf{a}$, получим

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i,$$

где $\mathbf{a}_i$ — ускорение рассматриваемой материальной точки, вызываемое действием на нее одной силы $\mathbf{F}_i$. Таким образом, *если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то каждая из них сообщает материальной точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.* Это утверждение называют **принципом независимости действия сил.**

6. Результирующую силу $\mathbf{F}$, действующую на материальную точку, можно разложить на две составляющие — касательную к траектории точки ($\mathbf{F}_\tau$) и нормальную к ней ($\mathbf{F}_n$):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_n.$$

С другой стороны, в § 1.3 было показано, что ускорение $\mathbf{a}$ материальной точки равно векторной сумме ее касательного ($\mathbf{a}_\tau$) и нормального ($\mathbf{a}_n$) ускорений:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n.$$

Из основного уравнения динамики материальной точки следует, что

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{\mathbf{F}_\tau}{m} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{F}_n}{m},$$

где m — масса материальной точки.

Нормальная сила $\mathbf{F}_n$ так же, как и $\mathbf{a}_n$, направлена к центру кривизны траектории. Поэтому ее обычно называют **центростремительной**

силой. Эта сила вызывает изменение только направления вектора $\mathbf{v}$ скорости точки, т. е. искривляет ее траекторию. В соответствии с формулой (1.13″) центростремительная сила численно равна

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R}, \tag{2.5}$$

где R — радиус кривизны траектории материальной точки.

Изменение численного значения v скорости точки, характеризуемое касательным ускорением, вызывает касательная сила $\mathbf{F}_\tau$. Если $\mathbf{F}_\tau$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{v}$, то точка движется ускоренно $\left(\frac{dv}{dt} > 0\right)$, если $\mathbf{F}_\tau$ противоположна по направлению вектору $\mathbf{v}$, то точка движется замедленно $\left(\frac{dv}{dt} < 0\right)$. Наконец, при $\mathbf{F}_\tau = 0$ точка движется равномерно ($v = \text{const}$). Если, кроме того, $F_n = \text{const}$, то и $R = \frac{mv^2}{F_n} = \text{const}$, т. е. точка движется равномерно по траектории с постоянным радиусом кривизны. Из плоских кривых таким свойством обладает окружность, а из пространственных кривых — винтовая линия.

7. **Импульсом**, или **количеством движения, материальной точки** называют вектор $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$, где m — масса материальной точки, а $\mathbf{v}$ — скорость ее движения. Импульс материальной точки является одной из важнейших ее динамических характеристик, зависящей как от быстроты движения точки, так и от ее инертности.

Масса материальной точки постоянна, а ее ускорение $\mathbf{a}$ связано со скоростью $\mathbf{v}$ соотношением (1.8): $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.
Поэтому

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{K}}{dt},$$

и уравнение (2.3) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{2.6}$$

Это уравнение является математическим выражением **второго закона Ньютона:** *скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.*

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то в соответствии с принципом независимости действия сил под $\mathbf{F}$ во втором законе Ньютона надо понимать результирующую силу.

8. Как мы уже отмечали, в ньютоновской механике считают, что масса материальной точки остается постоянной при любых изменениях состояния движения этой точки. Соответственно уравнения (2.3) и (2.6) представляют собой две совершенно эквивалентные формы записи второго закона динамики. Аддитивность и неизменность массы полностью согласовались с представлениями Ньютона о том, что масса

тела определяется количеством вещества, содержащегося в этом теле. Однако в начале XX в. выяснилось, что такое истолкование массы неправильно. После открытия электрона (конец XIX в.) и проведения экспериментальных исследований движения электронов в электрических и магнитных полях было обнаружено, что закон (2.3) отнюдь не универсален. Если скорость электрона близка по величине к скорости c света в вакууме ($c = 3\cdot 10^8$ м/с), то ускорение электрона не удовлетворяет уравнению (2.3). Оказывается, например, что ускорение электрона совпадает по направлению с вызывающей его силой $\mathbf{F}$ только в двух частных случаях: если сила $\mathbf{F}$ параллельна скорости электрона $\mathbf{v}$ или если она перпендикулярна к $\mathbf{v}$. При одних и тех численных значениях $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$ численные значения ускорения электрона оказываются неодинаковыми в этих двух случаях.

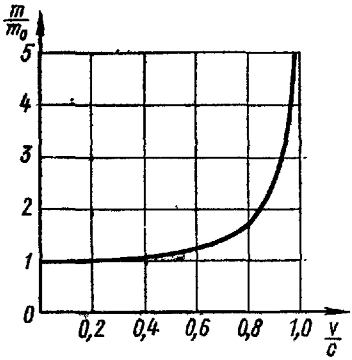

Рис. 2.1.

Все эти особенности поведения электронов при очень больших скоростях движения нашли свое объяснение в специальной теории относительности Эйнштейна, которую мы подробно рассмотрим в III томе. Сейчас же лишь укажем, что в теории относительности изменение движения материальной точки под действием силы $\mathbf{F}$ полностью описывается уравнением (2.6), причем масса m точки не постоянна, а зависит от скорости $\mathbf{v}$ по следующему закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

где m_0— **масса покоя** материальной точки, т. е. ее масса при скорости $v = 0$. Из этой формулы видно, что массу движущегося тела нельзя отождествлять с количеством содержащегося в нем вещества. По мере увеличения скорости тела его масса возрастает, а количество вещества в теле, определяемое числом и составом содержащихся в нем атомов и молекул, не изменяется. Согласно современным представлениям масса материальной точки одновременно является мерой ее инерционных и гравитационных свойств (см. § 6.1).

Зависимость массы от скорости становится заметной только при очень больших скоростях, соизмеримых со скоростью света в вакууме (рис. 2.1). Поэтому в классической механике Ньютона, изучающей движения тел со сравнительно малыми скоростями ($v \ll c$), массы тел можно считать постоянными и равными их массам покоя.

9. Перепишем второй закон Ньютона (2.6) в следующем виде:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\,dt. \tag{2.6'}$$

Вектор $\mathbf{F}\,dt$ называют **элементарным импульсом силы** за малый промежуток времени ее действия dt. Таким образом, *изменение импульса материальной точки за малый промежуток времени dt равно элементарному импульсу за тот же промежуток времени результирующей силы, действующей на материальную точку.* Соответственно изменение импульса материальной точки за конечный промежуток времени от t до $t+\Delta t$ равно

$$\Delta(m\mathbf{v}) = \int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{F}\,dt, \qquad (2.6'')$$

где $\int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{F}\cdot dt$ — импульс результирующей силы $\mathbf{F}$ за рассматриваемый промежуток времени.

Если на материальную точку действует постоянная сила ($\mathbf{F} = \mathrm{const}$), то импульс точки является линейной функцией времени:

$$m\mathbf{v} = \int_{0}^{t} \mathbf{F}\,dt + m\mathbf{v}_0 = \mathbf{F}t + m\mathbf{v}_0, \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость материальной точки в момент начала отсчета времени ($t = 0$). В частности, если $\mathbf{F} = 0$, то импульс точки не изменяется — она движется равномерно и прямолинейно в соответствии с первым законом Ньютона.

Из (2.7) следует, что приращение импульса за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно

$$\Delta(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}(t_2 - t_1) = \mathbf{F}\Delta t, \qquad (2.7')$$

т. е. изменение импульса материальной точки под действием постоянной силы равно произведению силы на продолжительность промежутка времени, в течение которого произошло это изменение.

Если сила $\mathbf{F}$ переменная, то

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \mathbf{F}_{\text{ср}}(t_2 - t_1). \qquad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{F}_{\text{ср}}$ — среднее значение переменной силы $\mathbf{F}$ в интервале времени от t_1 до t_2, т. е. такая постоянная сила, импульс которой за промежуток времени $t_2 - t_1$ равен импульсу переменной силы $\mathbf{F}$ за тот же промежуток времени.

§ 2.4. Третий закон Ньютона. Движение центра инерции

1. Наблюдения и опыты показывают, что механическое воздействие двух тел друг на друга всегда представляет собой их в з а и м о д е й с т в и е: если тело *1* действует на тело *2*, то при этом тело *2* в свою очередь действует на тело *1*. Так, например, Луна дви-