Вектор $\mathbf{F}\,dt$ называют **элементарным импульсом силы** за малый промежуток времени ее действия dt. Таким образом, *изменение импульса материальной точки за малый промежуток времени dt равно элементарному импульсу за тот же промежуток времени результирующей силы, действующей на материальную точку.* Соответственно изменение импульса материальной точки за конечный промежуток времени от t до $t+\Delta t$ равно

$$\Delta(m\mathbf{v}) = \int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{F}\,dt, \qquad (2.6'')$$

где $\int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{F}\cdot dt$ — импульс результирующей силы $\mathbf{F}$ за рассматриваемый промежуток времени.

Если на материальную точку действует постоянная сила ($\mathbf{F} = \text{const}$), то импульс точки является линейной функцией времени:

$$m\mathbf{v} = \int_{0}^{t} \mathbf{F}\,dt + m\mathbf{v}_0 = \mathbf{F}t + m\mathbf{v}_0, \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость материальной точки в момент начала отсчета времени ($t = 0$). В частности, если $\mathbf{F} = 0$, то импульс точки не изменяется — она движется равномерно и прямолинейно в соответствии с первым законом Ньютона.

Из (2.7) следует, что приращение импульса за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно

$$\Delta(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}(t_2 - t_1) = \mathbf{F}\Delta t, \qquad (2.7')$$

т. е. изменение импульса материальной точки под действием постоянной силы равно произведению силы на продолжительность промежутка времени, в течение которого произошло это изменение.

Если сила $\mathbf{F}$ переменная, то

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \mathbf{F}_{\text{ср}}(t_2 - t_1). \qquad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{F}_{\text{ср}}$ — среднее значение переменной силы $\mathbf{F}$ в интервале времени от t_1 до t_2, т. е. такая постоянная сила, импульс которой за промежуток времени $t_2 - t_1$ равен импульсу переменной силы $\mathbf{F}$ за тот же промежуток времени.

§ 2.4. Третий закон Ньютона. Движение центра инерции

1. Наблюдения и опыты показывают, что механическое воздействие двух тел друг на друга всегда представляет собой их в з а и м о д е й с т в и е: если тело *1* действует на тело *2*, то при этом тело *2* в свою очередь действует на тело *1*. Так, например, Луна дви-

жется по своей орбите под влиянием тяготения к Земле. В то же самое время на Землю действует тяготение Луны, которое вызывает, в частности, периодически повторяющиеся морские приливы и отливы. Человек, прыгая с лодки на берег, отталкивает лодку назад, а на него со стороны лодки действует сила, направленная вперед. Поэтому человек и лодка движутся в прямо противоположных направлениях. При столкновении двух биллиардных шаров одновременно изменяются скорости обоих шаров, т. е. каждый из них действует на другой. На ведущие колеса электровоза действуют со стороны рельс силы трения покоя, направленные в сторону движения электровоза и обусловливающие его силу тяги. В свою очередь ведущие колеса действуют на рельсы с силами трения покоя, имеющими прямо противоположное направление.

2. На основе количественного анализа механического взаимодействия тел Ньютон установил свой **третий закон динамики**, который можно сформулировать следующим образом: *действия двух тел друг на друга всегда равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны*, т. е.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{2.9}$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$— сила, действующая на первое тело со стороны второго, а $\mathbf{F}_{21}$— сила, действующая на второе тело со стороны первого. Следует отметить, что силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ приложены к разным телам и потому не уравновешивают друг друга.

В дальнейшем мы будем пользоваться третьим законом Ньютона, сформулированным применительно к взаимодействию двух материальных точек: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены во взаимно противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

Третий закон Ньютона является существенным дополнением к его первому и второму законам, так как позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной системы материальных точек, т. е. произвольной механической системы.

3. В динамике широко пользуются понятием центра инерции механической системы. **Центром инерции, или центром масс,** системы материальных точек называют такую точку C, радиус-вектор которой

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i, \tag{2.10}$$

где m_i и $\mathbf{r}_i$ — масса и радиус-вектор i-й точки системы, m — общая масса всей системы, а n — число материальных точек, входящих в состав системы. Соответственно соотношения между декартовыми координатами центра инерции и всех точек системы имеют вид

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{и} \quad z_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{2.10'}$$

Как известно из курса физики средней школы, **центром тяжести системы** называют точку приложения равнодействующей параллельных сил тяжести всех частей системы. Радиус-вектор центра тяжести равен

$$\mathbf{r}_{\text{ц. т.}} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} P_i \mathbf{r}_i,$$

где P_i — численное значение силы тяжести i-й материальной точки, $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$. Так как $P_i = m_i g$ и $P = mg$, где g — численное значение ускорения свободно падающих тел, то центр тяжести системы совпадает с ее центром инерции:

$$\mathbf{r}_{\text{ц. т}} = \frac{1}{mg} \sum_{i=1}^{n} m_i g \mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C.$$

В этом выводе мы предполагали, что величина g одинакова во всех точках системы. Такое допущение справедливо, если линейные размеры системы во много раз меньше радиуса Земли.

4. Скорость центра инерции системы

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{v}_i$ — скорость i-й материальной точки. Геометрическую сумму импульсов всех материальных точек системы называют **импульсом системы** $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i.$$

Таким образом, из (2.11) следует, что импульс системы равен произведению массы всей системы на скорость ее центра инерции:

$$\mathbf{K} = m\,\mathbf{v}_C. \tag{2.12}$$

5. Тела, не входящие в состав рассматриваемой механической системы, называют **внешними телами**, а силы, действующие на систему со стороны этих тел,— **внешними силами**. Соответственно, силы взаимодействия между материальными точками, принадлежащими рассматриваемой системе, называют **внутренними силами**.

Если $\mathbf{F}_{ik}$ — сила, действующая на i-ю точку системы со стороны k-й, то результирующая всех внутренних сил, приложенных к i-й точке, равна

$$\mathbf{F}_i^{\text{внутр}} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \mathbf{F}_{ik} = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \cdots + \mathbf{F}_{i,\,i-1} + \mathbf{F}_{i,\,i+1} + \cdots + \mathbf{F}_{in}. \tag{2.13}$$

В сумме, стоящей справа, индекс k пробегает все значения от 1 до n, кроме i, так как i-я точка не может действовать сама на себя. Обозначим через $\mathbf{F}_i^{\text{внеш}}$ результирующую всех внешних сил, приложенных к i-й точке системы. Тогда по второму закону Ньютона можно написать следующую систему уравнений движения всех материальных точек системы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1) &= \mathbf{F}_1^{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1n},\\
\frac{d}{dt}(m_2\mathbf{v}_2) &= \mathbf{F}_2^{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d}{dt}(m_n\mathbf{v}_n) &= \mathbf{F}_n^{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \cdots + \mathbf{F}_{n,\,n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.14)$$

Складывая почленно эти уравнения и группируя попарно силы $\mathbf{F}_{ik}$ и $\mathbf{F}_{ki}$, находим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{\text{внеш}} + (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31}) + \\ + \cdots + (\mathbf{F}_{n-1,\,n} + \mathbf{F}_{n,\,n-1}).$$

Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, поэтому все скобки в правой части этого уравнения равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{\text{внеш}}$$

Так как производная от суммы равна сумме производных от всех слагаемых, то

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{K}}{dt},$$

где $\mathbf{K}$ — импульс системы. Силу $\mathbf{F}$, равную сумме всех внешних сил, приложенных к системе:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{\text{внеш}},$$

называют **главным вектором внешних сил**. Таким образом, окончательно можно написать

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (2.15)$$

Это уравнение, полученное нами с помощью второго и третьего законов Ньютона, является обобщением уравнения (2.6) на произвольную механическую систему, так как ее всегда можно мысленно представить в виде системы материальных точек, взаимодействующих друг с другом и с внешними телами. Оно показывает, что *скорость изменения импульса механической системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на эту систему.*

В проекциях на оси декартовой системы координат векторное уравнение (2.15) эквивалентно системе трех уравнений:

$$\frac{dK_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = F_y \quad \text{и} \quad \frac{dK_z}{dt} = F_z, \tag{2.15$'$}$$

причем

$$K_x = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}, \quad K_y = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy} \quad \text{и} \quad K_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iz}.$$

6. С помощью формулы (2.12) можно переписать уравнение (2.15) в форме

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{a}_C = \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}$ — ускорение центра инерции системы, а m — масса всей системы.

Таким образом, *центр инерции механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.*

В общем случае движение твердого тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\mathbf{v}$, равной скорости $\mathbf{v}_C$ центра инерции тела, и вращения вокруг центра инерции. Поэтому уравнение (2.16) часто называют основным уравнением динамики поступательного движения твердого тела.

7. Рассмотрим несколько примеров.

а. Лошадь тянет повозку вперед с такой же силой, с какой повозка тянет лошадь назад. Под действием одних этих в н у т р е н н и х сил система лошадь — повозка не могла бы сдвинуться с места. Все дело в том, что лошадь тянет повозку, упираясь при этом в землю. Следовательно, на лошадь действует со стороны земли горизонтальная внешняя сила — сила трения, которая и приводит в движение систему лошадь — повозка.

б. При переходе человека с носа на корму лодки, которая первоначально стояла неподвижно на спокойной воде озера, лодка перемещается относительно берега в противоположном направлении. Если бы не было сопротивления воды движению лодки, то при переходе человека лодка должна была бы перемещаться таким образом, чтобы центр инерции системы лодка — человек оставался в покое относительно берега. Благодаря действию горизонтальной внешней силы $\mathbf{F}$ сопротивления воды перемещение лодки несколько уменьшается. Соответственно центр инерции системы смещается относительно берега в направлении вектора $\mathbf{F}$, т. е. в направлении перемещения человека.

в. Пренебрегая сопротивлением воздуха, можно считать, что на летящий снаряд действует единственная внешняя сила — сила его тяжести $m\mathbf{g}$. Поэтому центр инерции снаряда движется с ускорением свободного падения $\mathbf{g}$. Пусть после разрыва в воздухе осколки снаряда разлетаются в разные стороны с различными начальными скоростями. Однако если и для осколков можно пренебречь влиянием сопротивления воздуха, то общий центр инерции всех осколков должен продолжать двигаться с ускорением $\mathbf{g}$ по той же траектории, по которой он двигался бы, если бы снаряд не разорвался.

8. До сих пор мы предполагали, что масса тела остается постоянной, так как само тело не изменяется в процессе его движения. Однако это условие далеко не всегда выполняется. Например, продукты сгорания запасенного в ракете топлива выбрасываются из сопла ракетного двигателя и масса ракеты уменьшается по мере сгорания топлива. Уравнение поступательного движения тела переменной массы впервые было предложено профессором Петербургского университета И. В. Мещерским (1897). Для вывода этого уравнения воспользуемся дифференциальным уравнением (2.15) для поступательного движения системы, состоящей из тела переменной массы и присоединяющихся или отделяющихся от него частиц. Если в момент времени t масса тела и его скорость равны m и $\mathbf{v}$, а в момент времени $t + dt$ они равны $m + dm$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, то изменение импульса системы тело — частицы, присоединившиеся (отделившиеся) за время dt, равно

$$d\mathbf{K} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - m\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \cdot dm,$$

где $\mathbf{v}_1$— скорость присоединяющихся частиц (если $\frac{dm}{dt} > 0$) до присоединения или отделяющихся частиц (если $\frac{dm}{dt} < 0$) после отделения. В результате простых преобразований получим

$$d\mathbf{K} = m \cdot d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)\, dm + dm \cdot d\mathbf{v}.$$

Третий член в правой части этого уравнения можно отбросить, так как он является малым высшего порядка малости по сравнению с остальными двумя членами. Поэтому

$$d\mathbf{K} = m \cdot d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)\, dm.$$

Из уравнения (2.15) следует, что $d\mathbf{K} = \mathbf{F} \cdot dt$, где $\mathbf{F}$ — главный вектор внешних сил. Таким образом,

$$m \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot dt + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})dm = \mathbf{F} \cdot dt + \mathbf{u} \cdot dm,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ — скорость присоединяющихся или отделяющихся частиц по отношению к телу, называемая их **относительной скоростью.**

Уравнение движения тела переменной массы имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_p, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ — ускорение тела, а дополнительную силу

$$\mathbf{F}_p = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt} = \mathbf{u} \cdot \frac{dm}{dt}, \tag{2.17'}$$

обусловленную переменностью массы тела, называют **реактивиой силой.**

9. Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась уже давно. Так, в 1881 г. революционер-народоволец Н. И. Кибальчич, находясь в Петропавловской крепости перед казнью за участие в убийстве царя Александра II, составил проект реактивного летательного аппарата. Однако этот проект, затерявшийся в тюремных архивах, был обнаружен лишь после Великой Октябрьской социалистической революции. Вся жизнь выдающегося ученого и изобретателя К. Э. Циолковского была посвящена вопросам ракетной техники и применению ракет для межпланетных сообщений. Уже в 1903 г. он опубликовал статью, в которой была рассмотрена теория движения ракеты и впервые были даны основы теории жидкостного реактивного двигателя. Теория воздушно-реактивного двигателя впервые была опубликована в 1929 г. академиком Б. С. Стечкиным.

Из-за ряда технических трудностей широкое развитие реактивной и ракетной техники началось лишь в период второй мировой войны и особенно после ее окончания. Применение реактивных двигателей в авиации позволило во много раз увеличить скорости самолетов. Например, скорость современного транспортного самолета ТУ-144 в четыре раза превосходит скорость истребителей с поршневыми двигателями внутреннего сгорания, применявшихся в период второй мировой войны и составляет около 2500 км/ч. Ракетная техника явилась той базой, на основе которой стали возможными запуски искусственных спутников Земли, пилотируемых космических кораблей и автоматических орбитальных, лунных и межпланетных станций.

§ 2.5. Закон сохранения импульса

1. Механическую систему называют **замкнутой,** или **изолированной,** если на нее не действуют внешние силы, т. е. если она не взаимодействует с внешними телами. Строго говоря, каждая реальная система тел всегда не замкнута, так как подвержена, например, тяготению со стороны внешних тел. Однако если внутренние силы в системе во много раз превосходят внешние, то такую систему приближенно можно считать замкнутой. Например, наша Солнечная система находится на таких гигантских расстояниях даже до ближайших к к ней звезд, что их тяготение не играет практически никакой роли в движении планет. Оно определяется взаимодействием планет с Солн-