Глава III

ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

§ 3.1. Энергия, работа и мощность

1. В § 2.3 мы познакомились с понятием импульса тела, являющегося мерой его поступательного движения. Однако эта динамическая характеристика тела не может служить универсальной мерой для всех форм движения. Покажем это на примерах.

1) Если однородное тело, например цилиндр или шар, равномерно вращается вокруг неподвижной оси его симметрии, то, как легко проверить, векторная сумма импульсов всех его материальных точек равна нулю при любой угловой скорости тела. Следовательно, импульс тела не может быть мерой вращательного движения тела.

2) Две гири массами в 1 кг и 2 кг, свободно падая на Землю с высот, соответственно равных 20 и 5 м, имеют у поверхности Земли одинаковые по величине импульсы. Между тем, как показывают опыты, при ударе о Землю первая гиря способна сжать две одинаковые пружины на столько же, на сколько вторая гиря может сжать только одну из этих пружин. Таким образом, импульс не может полностью количественно характеризовать динамические свойства тел даже в поступательном движении.

3) Рассмотрим равномерное прямолинейное движение тела, происходящее с трением. В этом случае сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ уравновешивается силой $\mathbf{F}$, приложенной к телу, причем $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{тр}$. Трение, как известно, влечет за собой нагревание, связанное с преобразованием механического движения трущихся тел в беспорядочное тепловое движение молекул, из которых состоят тела. Однако вектор импульса тела $m\mathbf{v}$ при равномерном прямолинейном движении остается постоянным и никак не характеризует количество выделившейся теплоты.

2. Единой мерой различных форм движения служит физическая величина, называемая **энергией.** Энергия механической системы количественно характеризует эту систему с точки зрения возможных в ней количественных и качественных превращений движения. Эти превращения обусловлены взаимодействием тел системы как между собой, так и с внешними (по отношению к системе) телами.

Движение является неотъемлемым свойством материи. Поэтому всякое тело обладает энергией или, как часто говорят, запасом энергии, являющейся мерой его движения. Для количественной характеристики качественно различных форм движения, изучаемых в физике, вводятся соответствующие им виды (формы) энергии — механическая, внутренняя (см. § 10.1), электромагнитная и т. д. В этой главе мы ограничимся рассмотрением механической энергии, соответствующей механическому движению тел и связанным с ним взаимодействиям.

3. Изменение механического движения и энергии тела происходит в процессе силового взаимодействия этого тела с другими телами. Для количественной характеристики этого процесса в механике вводят

понятие **работы**, совершаемой силой. Если рассматриваемая сила **F** постоянна, а тело, к которому она приложена, движется поступательно и прямолинейно, то, как известно из курса средней школы, работой, совершаемой силой **F** при прохождении телом пути s, называют величину

$$A = Fs \cos \alpha = F_\tau s, \tag{3.1}$$

где α — угол между силой **F** и направлением движения тела, т. е. точки приложения силы, а $F_\tau = F \cos \alpha$ — проекция силы **F** на направление вектора **v** скорости тела (рис. 3.1).

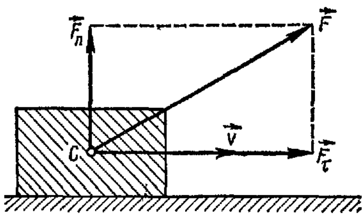

Рис. 3.1

В общем случае тело может двигаться произвольным, достаточно сложным образом, а сила **F** — изменяться, так что формулой (3.1) пользоваться нельзя. Однако рассматривая достаточно малое (элементарное) перемещение тела, можно считать силу **F** постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным. Поэтому **элементарной работой**, совершаемой произвольной силой **F** при перемещении точки ее приложения на малое расстояние ds, называют величину

$$\delta A = F \cos \alpha \, ds = F_\tau ds. \tag{3.1'}$$

Если **r** — радиус-вектор точки приложения силы, то $ds = |d\mathbf{r}|$ и $F \cos \alpha \, ds = (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$ — скалярное произведение векторов силы **F** и элементарного перемещения $d\mathbf{r}$ точки ее приложения. Следовательно, формулу (3.1′) можно также записать в виде

$$\delta A = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) dt, \tag{3.1''}$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — скорость точки приложения силы.

Нужно заметить, что в общем случае сила **F**, действующая на материальную точку, изменяется вместе с изменением координат этой точки. Иными словами, **F** является функцией трех координат, а ее касательная составляющая $\mathbf{F}_\tau$, кроме того, зависит от направления элементарного перемещения $d\mathbf{r}$. Поэтому, как показывается в математике, элементарная работа, равная $(\mathbf{F}, d\mathbf{r})$, или $F \cos \alpha \, ds$, вообще говоря, не является полным дифференциалом какой-либо функции координат. Следовательно ее нельзя обозначать через dA, так как для функций многих переменных d — общепринятый в математике символ полного дифференциала На основании сказанного мы применяем для элементарной работы символ δA.

4. Работа, совершаемая силой **F** на конечном пути s, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути; эта сумма приводится к интегралу:

$$A = \int_0^s F \cos \alpha ds = \int_0^s F_\tau \, ds. \tag{3.2}$$

Если величина F_τ касательной составляющей силы **F** задана как функция от длины пути s (рис. 3.2), то, как видно из уравнения (3.2), работа A, совершаемая силой **F** на пути s, измеряется площадью, заштрихованной на рис. 3.2. Если $\mathbf{F}_\tau$ не зависит от s ($F_\tau = \text{const}$), то

$$A = F_\tau s.$$

Из уравнения (3.1′) видно, что сила, действующая на тело, не совершает работы, если:

а) точка приложения силы покоится ($ds = 0$);

б) сила перпендикулярна к направлению перемещения $d\mathbf{r}$ точки ее приложения ($\alpha = 90°$; $F_\tau = 0$).

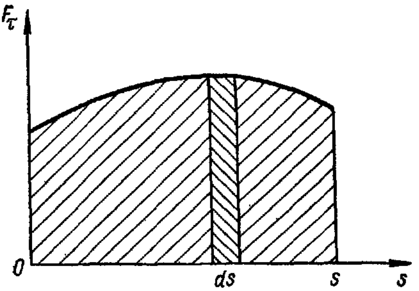

Рис. 3.2.

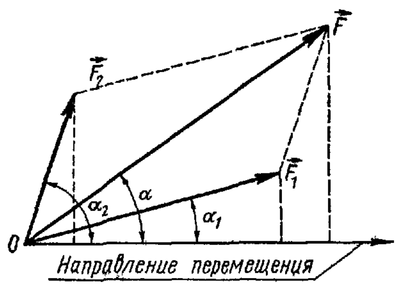

Рис. 3.3.

В последнем случае сила лишь искривляет траекторию движущегося тела. Таково, например, действие центростремительной силы на материальную точку, равномерно движущуюся по окружности.

Если угол $\alpha < 90°$, то работа силы **F** положительна. В этом случае составляющая $\mathbf{F}_\tau$ силы совпадает по направлению с вектором **v** скорости точки приложения силы. Поэтому силу **F** называют **движущей силой**. Если угол $\alpha > 90°$, то работа силы **F** отрицательна. В этом случае $\mathbf{F}_\tau$ и **v** противоположны по направлению, поэтому силу **F** называют **силой сопротивления**. Примером силы сопротивления может служить сила трения скольжения.

5. Пусть на материальную точку одновременно действуют несколько сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (на рис. 3.3 принято, что $n = 2$). Тогда алгебраическая сумма работ, совершаемых всеми этими силами на малом перемещении $d\mathbf{r}$ материальной точки, равна работе, совершаемой на том же перемещении результирующей силой $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i \, ds = ds \sum_{i=1}^{n} F_{i_\tau} = F_\tau ds.$$

В случае протяженного тела силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ могут быть приложены в разных точках тела, перемещения которых за одно и то же малое время dt также могут быть неодинаковы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i),$$

где $d\mathbf{r}_i$— перемещение за рассматриваемое время dt точки приложения силы $\mathbf{F}_i$. Если тело можно считать твердым и оно движется п о с т у п а т е л ь н о, то перемещения всех его точек за время dt одинаковы: $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_k = d\mathbf{r}$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$— главный вектор внешних сил, приложенных к телу.

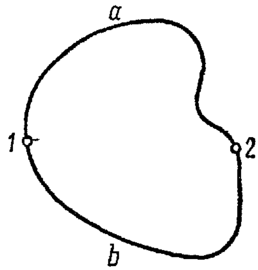

Рис. 3.4.

6. Силу $\mathbf{F}$, действующую на материальную точку, называют **консервативной**, или **потенциальной**, если работа A_{1-2}, совершаемая этой силой при перемещении точки из одного произвольного положения (*1*) в другое (*2*), не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло:

$$A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2},$$

где A_{1-a-2}— работа при перемещении точки из положения *1* в *2* по траектории *1 — a — 2* (рис. 3.4), A_{1-b-2}— вдоль траектории *1 —b—2*. Изменение направления движения точки вдоль траектории на противоположное вызывает изменение знака работы консервативной силы, так как величина F_τ в выражении (3.2) меняет свой знак. Поэтому *при перемещении материальной точки вдоль замкнутой траектории L, например 1—a—2—b—1, работа консервативной силы тождественно равна нулю*:

$$\oint_{(L)} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} \equiv 0. \qquad (3.2')$$

Примерами консервативных сил могут служить силы всемирного тяготения (см. гл. VI), силы упругости (см. гл. V), силы электростатического взаимодействия между заряженными телами.

Из тождества (3.2′) следует, как доказывается в математике, что подынтегральное выражение ($\mathbf{F}$, $d\mathbf{r}$), т. е. элементарная работа консервативных сил, представляет собой полный дифференциал функции координат.

Все силы, не удовлетворяющие условию (3.2′), называются **неконсервативными.** Характерным примером таких сил являются силы трения скольжения. Сила трения скольжения всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения, так что $\cos\alpha \equiv \equiv -1$. Поэтому работа силы трения скольжения при перемещении точки ее приложения вдоль замкнутой траектории всегда отрицательна и никогда не равна нулю.

7. Для характеристики скорости совершения работы силой вводится понятие мощности. **Мощностью** N силы $\mathbf{F}$ называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой этой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \tag{3.3}$$

Подставляя в эту формулу выражение (3.1′) для элементарной работы, получим

$$N = F\cos\alpha\frac{ds}{dt} = Fv\cos\alpha = F_\tau v = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \tag{3.4}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость точки приложения силы.

Следовательно, мощность (или мгновенная мощность) силы равна произведению численных значений касательной составляющей силы и скорости движения, т. е. скалярному произведению векторов силы и скорости. Если $N \neq \text{const}$, то часто пользуются средней мощностью $N_{\text{ср}}$ за некоторый конечный промежуток времени t, в течение которого сила совершила работу A:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t}. \tag{3.4′}$$

§ 3.2. Энергия кинетическая и потенциальная

1 В механике различают два вида энергии. кинетическую и потенциальную **Киветической эиергией** тела называют энергию $W_к$, являющуюся мерой его механического движения и измеряемую той работой, которую может совершить тело при его торможении до полной остановки. Найдем выражение для кинетической энергии твердого тела B, имеющего массу m и движущегося поступательно со скоростью $\mathbf{v}$.

Пусть тело B тормозится, наталкиваясь на неподвижно закрепленное тело C и деформируя его. При этом тело B действует на тело C с некоторой силой $\mathbf{F}$ (в общем случае переменной) и на малом участке пути ds совершает элементарную работу

$$\delta A = F_\tau ds$$

По третьему закону Ньютона на тело B одновременно действует сила $-\mathbf{F}$, касательная составляющая которой $-\mathbf{F}_\tau$ вызывает изменение численного значения скорости тела. По второму закону Ньютона

$$-F_\tau = m\frac{dv}{dt}$$