сторону, противоположную направлению движения, так что $\cos\alpha \equiv \equiv -1$. Поэтому работа силы трения скольжения при перемещении точки ее приложения вдоль замкнутой траектории всегда отрицательна и никогда не равна нулю.

7. Для характеристики скорости совершения работы силой вводится понятие мощности. **Мощностью** N силы $\mathbf{F}$ называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой этой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \qquad (3.3)$$

Подставляя в эту формулу выражение (3.1′) для элементарной работы, получим

$$N = F\cos\alpha\frac{ds}{dt} = Fv\cos\alpha = F_\tau v = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \qquad (3.4)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость точки приложения силы.

Следовательно, мощность (или мгновенная мощность) силы равна произведению численных значений касательной составляющей силы и скорости движения, т. е. скалярному произведению векторов силы и скорости. Если $N \neq \text{const}$, то часто пользуются средней мощностью $N_{\text{ср}}$ за некоторый конечный промежуток времени t, в течение которого сила совершила работу A:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t}. \qquad (3.4')$$

§ 3.2. Энергия кинетическая и потенциальная

1 В механике различают два вида энергии. кинетическую и потенциальную **Киистической эиергией** тела называют энергию $W_\text{к}$, являющуюся мерой его механического движения и измеряемую той работой, которую может совершить тело при его торможении до полной остановки. Найдем выражение для кинетической энергии твердого тела B, имеющего массу m и движущегося поступательно со скоростью $\mathbf{v}$.

Пусть тело B тормозится, наталкиваясь на неподвижно закрепленное тело C и деформируя его. При этом тело B действует на тело C с некоторой силой $\mathbf{F}$ (в общем случае переменной) и на малом участке пути ds совершает элементарную работу

$$\delta A = F_\tau ds$$

По третьему закону Ньютона на тело B одновременно действует сила $-\mathbf{F}$, касательная составляющая которой $-\mathbf{F}_\tau$ вызывает изменение численного значения скорости тела. По второму закону Ньютона

$$-F_\tau = m\frac{dv}{dt}$$

Следовательно,

$$\delta A = -m\frac{dv}{dt}ds = -m\frac{ds}{dt}dv,$$

или

$$\delta A = -mvdv. \qquad (3.5)$$

Работа, совершаемая телом B до полной его остановки,

$$A = -\int_{v}^{0} mvdv = \frac{mv^2}{2}.$$

Итак, кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения массы этого тела на квадрат его скорости:

$$W_к = A = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3.6)$$

Из формулы (3.6) видно, что кинетическая энергия тела не может быть отрицательной ($W_к \geqslant 0$).

Формула (3.6) справедлива, в частности, для кинетической энергии материальной точки. Любую механическую систему можно рассматривать как систему материальных точек. Поэтому кинетическая энергия $W_к$ механической системы равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, образующих эту систему:

$$W_к = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}, \qquad (3.7)$$

где m_i и v_i— масса и скорость i-й материальной точки. Таким образом, кинетическая энергия системы полностью определяется величинами масс и скоростей движения входящих в нее материальных точек. Она не зависит от того, каким образом части рассматриваемой системы приобрели данные значения скоростей.

Кратко этот важный вывод можно сформулировать следующим образом: *кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.*

2. Скорости $\mathbf{v}_i$ существенным образом зависят от выбора системы отсчета. При выводе формул (3.6) и (3.7) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы пользоваться законами Ньютона. Однако в разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, значения скорости $\mathbf{v}_i$ i-й материальной точки системы, а следовательно, ее кинетическая энергия и кинетическая энергия всей системы неодинаковы. Иными словами, значение кинетической энергии системы зависит от выбора системы отсчета, т. е. является величиной относительной.

3. Если на систему материальных точек или тел действуют консервативные силы, то можно ввести понятие потенциальной

энергии этой системы. В самом деле, работа A_{1-2}, совершаемая консервативными силами при изменении **конфигурации системы**, т. е. расположения всех ее частей по отношению к системе отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение при переводе системы из начальной конфигурации (*1*) в конечную (*2*). Работа A_{1-2} полностью определяется начальной и конечной конфигурациями системы. Иначе говоря, ее можно выразить в форме

$$A_{1-2} = W_{п_1} - W_{п_2}, \tag{3.8}$$

где $W_п$ — некоторая функция состояния системы, зависящая только от координат всех материальных точек системы[1]. Эту функцию называют **потенциальной энергией системы**.

Из соотношения (3.8) следует, что работа консервативных сил, действующих на механическую систему, равна убыли потенциальной энергии этой системы.

Работа консервативных сил при бесконечно малом (элементарном) изменении конфигурации системы является полным дифференциалом функции — $W_п$:

$$dA = -dW_п \tag{3.8'}$$

Формулы (3.8) и (3.8′) позволяют найти зависимость потенциальной энергии системы от ее конфигурации только с точностью до произвольного постоянного слагаемого C, не влияющего на величину разности $W_{п_1} - W_{п_2}$. Поэтому в каждой конкретной задаче для получения однозначной зависимости потенциальной энергии от конфигурации системы выбирают так называемую **нулевую конфигурацию**, для которой потенциальную энергию системы условно считают равной нулю.

Из (3.8) следует, что потенциальная энергия системы в произвольном состоянии равна работе, совершаемой консервативными силами при переводе системы из этого состояния в состояние, соответствующее нулевой конфигурации.

4. В качестве первого примера рассмотрим потенциальную энергию тела, обусловленную действием на него силы тяжести P. Если высота H подъема тела над поверхностью Земли во много раз меньше радиуса Земли, то можно считать, что сила тяжести не зависит от H: $P = mg = \text{const}$, где m — масса тела.

Работа, совершаемая силой тяжести при падении тела по вертикали с высоты H до поверхности Земли, $A = PH = mgH$.

Если это же тело падает по наклонной плоскости длиной l и с уг-

---

[1] Здесь и всюду в дальнейшем мы предполагаем, что в случае незамкнутой системы внешние консервативные силы *стационарны*, т. е. могут изменяться с течением времени только вследствие изменения положения системы относительно системы отсчета. Для этого необходимо, чтобы внешние тела, действующие с указанными силами на незамкнутую систему, были неподвижны относительно системы отсчета.

лом наклона α к вертикали ($l \cos \alpha = H$), то работа силы тяжести равна прежней величине:

$$A = Pl \cos \alpha = mgH,$$

где H — высота наклонной плоскости.

Если, наконец, тело движется по произвольной криволинейной траектории (рис. 3.5), то мы можем представить себе эту кривую состоящей из n малых прямолинейных участков Δl_i. Работа силы тяжести на каждом из таких участков равна

$$\Delta A_i = P \cdot \Delta l_i \cos \alpha_i = P \cdot \Delta H_i,$$

где ΔH_i — проекция участка Δl_i на вертикальную прямую. На всем криволинейном пути работа силы тяжести, очевидно, равна

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} P \cdot \Delta H_i = P \cdot H = mgH.$$

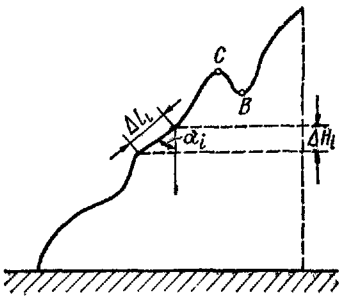

Рис. 3.5.

Итак, работа силы тяжести зависит только от разности высот начальной и конечной точек пути. Сила тяжести тела приложена к его центру тяжести (см. § 2.4). Поэтому работа силы тяжести при любом движении тела равна произведению этой силы на разность высот начального и конечного положений его центра тяжести. Отсюда следует, что работа силы тяжести вдоль замкнутой траектории центра тяжести тела равна нулю, т. е. что сила тяжести, действительно, является консервативной. Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту H над поверхностью Земли, как видно из формулы (3.8), равна

$$W_п = mgH + W_{п_0}, \qquad (3.9)$$

где $W_{п_0}$ — потенциальная энергия тела, лежащего на поверхности Земли. Обычно принимают $W_{п_0} = 0$, так что

$$W_п = mgH. \qquad (3.9')$$

5. Найдем потенциальную энергию упруго деформированного тела. Сила упругости $\mathbf{F}_{упр}$, как известно из опыта, пропорциональна величине деформации $\mathbf{x}$, т. е.

$$\mathbf{F}_{упр} = -k\mathbf{x},$$

где k — коэффициент упругости, характеризующий упругие свойства тела (см. § 5.2), а знак минус показывает, что сила упругости направлена в сторону, противоположную направлению деформации: упруго деформированное тело стремится восстановить свои первоначальные форму и размеры.

Элементарная работа, совершаемая силой $\mathbf{F}_{упр}$ при бесконечно малом изменении деформации тела на величину $d\mathbf{x}$, равна

$$dA = (\mathbf{F}_{упр}, d\mathbf{x}) = -kxdx.$$

Работа этой силы при конечном изменении деформации тела, например, при переводе его из недеформированного состояния ($x = 0$) в состояние, соответствующее деформации x, равна

$$A = -\int_0^x kxdx = -\frac{kx^2}{2}.$$

Работа A не зависит от хода процесса деформации тела и полностью определяется значениями деформации тела в начальном и конечном состояниях. Следовательно, силы упругости являются консервативными, а потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$W_п = \frac{kx^2}{2} + W_{п_0},$$

где $W_{п_0}$ — потенциальная энергия недеформированного тела. Полагая ее равной нулю, получим

$$W_п = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.10}$$

6. Если рассматриваемая система замкнута, то ее потенциальная энергия обусловлена только внутренними консервативными силами взаимодействия частей системы. На незамкнутую систему могут действовать также внешние консервативные силы. В соответствии с формулой (3.8′) изменение потенциальной энергии системы

$$dW_п = -dA = -dA^{внутр} - dA^{внеш},$$

где $dA^{внутр}$ и $dA^{внеш}$ — работы, совершаемые при малом изменении конфигурации системы, соответственно, всеми внутренними и всеми внешними консервативными силами. Поэтому потенциальную энергию $W_п$ системы можно представить в виде суммы ее **внутренней и внешней потенциальных энергий:**

$$W_п = W_п^{внутр} + W_п^{внеш}, \tag{3.11}$$

причем

$$dW_п^{внутр} = -dA^{внутр} \quad и \quad dW_п^{внеш} = -dA^{внеш}. \tag{3.11′}$$

Примером внешней потенциальной энергии может служить рассмотренная выше потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли, так как она обусловлена действием на тело постоянной внешней консервативной силы — силы тяжести. Примером внутренней потенциальной энергии является потенциальная энергия упруго деформированного тела.

7. **Полной механической энергией** системы называют величину W, равную сумме кинетической и потенциальной энергий этой системы:

$$W = W_{к} + W_{п}. \qquad (3.12)$$

Из предыдущего видно, что полная механическая энергия системы — функция ее состояния, так как зависит только от координат, скоростей и масс всех малых частей (материальных точек) системы (см. сноску на стр. 62).

§ 3.3. Закон сохранения и превращения энергии в механике

1. Путь к правильному пониманию переходов движения из одной формы в другую был намечен М. В. Ломоносовым (1748 г.). Он сформулировал закон сохранения общей массы вещества при химических превращениях и закон сохранения материи и движения. Через сто лет после Ломоносова Р. Майер и Г. Гельмгольц дали количественную формулировку **закона сохранения и превращения энергии.** Этот закон состоит в следующем:

в замкнутой системе энергия может переходить из одних видов в другие и передаваться от одного тела другому, но ее общее количество остается неизменным.

Закон сохранения и превращения энергии является одним из фундаментальных законов природы, справедливых как для систем макроскопических тел, так и для систем элементарных частиц. В теоретической физике доказывается, что этот закон вытекает из однородности времени, т. е. независимости законов физических явлений от выбора начала отсчета времени. Закон сохранения и превращения энергии имеет глубокий философский смысл. Он блестяще подтверждает одно из основных положений диалектического материализма о том, что движение является неотъемлемым свойством материи, что оно не сотворимо и не уничтожимо, а лишь преобразуется из одних форм в другие.

2. Найдем условие, которому должна удовлетворять система тел для того, чтобы ее полная механическая энергия не изменялась с течением времени. Если $\mathbf{v}$ — скорость i-й материальной точки с массой m_i, то ее кинетическая энергия

$$W_{к_i} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i}{2}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i).$$

Изменение этой энергии за малый промежуток времени dt, связанное с изменением скорости $\mathbf{v}_i$ на $d\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \cdot dt$ ($\mathbf{a}_i$— ускорение рассматриваемой материальной точки), равно

$$dW_{к_i} = \frac{m_i}{2}[(d\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_i, d\mathbf{v}_i)] = m_i(\mathbf{a}_i dt, \mathbf{v}_i) = (m_i\mathbf{a}_i, \mathbf{v}_i dt) =$$
$$= (m_i\mathbf{a}_i, d\mathbf{r}_i),$$