7. **Полной механической энергией** системы называют величину W, равную сумме кинетической и потенциальной энергий этой системы:

$$W = W_к + W_п. \qquad (3.12)$$

Из предыдущего видно, что полная механическая энергия системы — функция ее состояния, так как зависит только от координат, скоростей и масс всех малых частей (материальных точек) системы (см. сноску на стр. 62).

§ 3.3. Закон сохранения и превращения энергии в механике

1. Путь к правильному пониманию переходов движения из одной формы в другую был намечен М. В. Ломоносовым (1748 г.). Он сформулировал закон сохранения общей массы вещества при химических превращениях и закон сохранения материи и движения. Через сто лет после Ломоносова Р. Майер и Г. Гельмгольц дали количественную формулировку **закона сохранения и превращения энергии.** Этот закон состоит в следующем:

в замкнутой системе энергия может переходить из одних видов в другие и передаваться от одного тела другому, но ее общее количество остается неизменным.

Закон сохранения и превращения энергии является одним из фундаментальных законов природы, справедливых как для систем макроскопических тел, так и для систем элементарных частиц. В теоретической физике доказывается, что этот закон вытекает из однородности времени, т. е. независимости законов физических явлений от выбора начала отсчета времени. Закон сохранения и превращения энергии имеет глубокий философский смысл. Он блестяще подтверждает одно из основных положений диалектического материализма о том, что движение является неотъемлемым свойством материи, что оно не сотворимо и не уничтожимо, а лишь преобразуется из одних форм в другие.

2. Найдем условие, которому должна удовлетворять система тел для того, чтобы ее полная механическая энергия не изменялась с течением времени. Если $\mathbf{v}$ — скорость i-й материальной точки с массой m_i, то ее кинетическая энергия

$$W_{к_i} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i}{2}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i).$$

Изменение этой энергии за малый промежуток времени dt, связанное с изменением скорости $\mathbf{v}_i$ на $d\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \cdot dt$ ($\mathbf{a}_i$— ускорение рассматриваемой материальной точки), равно

$$dW_{к_i} = \frac{m_i}{2}[(d\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_i, d\mathbf{v}_i)] = m_i(\mathbf{a}_i dt, \mathbf{v}_i) = (m_i\mathbf{a}_i, \mathbf{v}_i dt) =$$
$$= (m_i\mathbf{a}_i, d\mathbf{r}_i),$$

где $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$ — приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}_i$ материальной точки. По второму закону Ньютона

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i,$$

где $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{f}_i$ — результирующие, соответственно, консервативных и неконсервативных сил, действующих на i-ю материальную точку. Поэтому

$$dW_{\text{к}_i} = (\mathbf{F}_i,\ d\mathbf{r}_i) + (\mathbf{f}_i,\ d\mathbf{r}_i)$$

Кинетическая энергия $W_\text{к}$ всей системы равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, образующих эту систему, а ее изменение за малый промежуток времени dt

$$dW_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} dW_{\text{к}_i},$$

т. е.

$$dW_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i,\ d\mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}_i,\ d\mathbf{r}_i). \qquad (3.13)$$

Первая сумма в правой части этого уравнения представляет собой суммарную работу dA, совершаемую всеми консервативными силами за промежуток времени dt. Эта работа равна убыли за то же время dt потенциальной энергии системы $W_\text{п} = W_\text{п}^\text{внутр} + W_\text{п}^\text{внеш}$ (см. сноску на стр. 62):

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i) = dA = -dW_\text{п}.$$

Вторая сумма в правой части уравнения (3.13) представляет собой суммарную работу $\delta A_\text{н.к}$, совершаемую всеми неконсервативными силами. Таким образом, уравнение (3.13) можно переписать в форме

$$dW_\text{к} + dW_\text{п} = \delta A_\text{н.к.}$$

или

$$dW = \delta A_\text{н.к.}, \qquad (3.14)$$

где $W = W_\text{к} + W_\text{п}$ — полная механическая энергия рассматриваемой системы.

Консервативной системой называют систему тел (материальных точек), внутренние силы взаимодействия между которыми консервативны, а все внешние силы — стационарны и консервативны. Для такой системы $\delta A_\text{н.к.} \equiv 0$ и из (3.14) следует, что

$$W = W_\text{к} + W_\text{п} = \text{const},$$

т. е. *полная механическая энергия консервативной системы не изменяется с течением времени.*

Этот закон называют **законом сохранения механической энергии.** Он справедлив, в частности, для замкнутой консервативной системы т. е. системы, на которую внешние силы вообще не действуют, а все внутренние силы — консервативны.

3. Рассмотрим применение закона сохранения механической энергии к расчету абсолютно упругого прямого центрального удара двух тел. **Абсолютно упругим** называют такой удар, в результате которого не происходит превращения механической энергии системы соударяющихся тел в другие виды энергии.

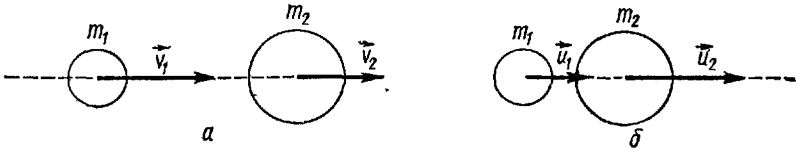

Рис. 3.6.

Пусть два абсолютно упругих шара с массами m_1 и m_2 до удара (рис. 3.6, *а*) движутся поступательно со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, направленными в одну и ту же сторону вдоль линии их центров, причем $v_1 > v_2$. Нужно найти скорости шаров $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ после соударения (рис. 3.6, *б*).

В процессе удара систему соударяющихся тел можно считать замкнутой. При абсолютно упругом ударе она, кроме того, консервативна. Следовательно, для решения этой задачи можно воспользоваться законами сохранения механической энергии и импульса. Перед ударом и после его завершения соударяющиеся тела не деформированы, т. е. потенциальную энергию системы в этих двух состояниях можно считать одинаковой и равной нулю. Тогда из закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \qquad (3.15)$$

По закону сохранения импульса

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2. \qquad (3.16)$$

При прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до и после удара направлены вдоль одной прямой — линии удара. Поэтому из (3.16) следует, что

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \qquad (3.17)$$

где v_1, v_2, u_1 и u_2 — проекции векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ на ось координат, параллельную линии удара.

Совместное решение уравнений (3.17) и (3.15) дает

$$u_1 = \frac{v_1 (m_1 - m_2) + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad u_2 = \frac{v_2 (m_2 - m_1) + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.18)$$

Следует помнить, что в формулах (3.18) скорости v_1 и v_2 могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки в зависимости от направлений векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) Массы шаров одинаковы ($m_1 = m_2 = m$). Тогда

$$u_1 = v_2; \; u_2 = v_1;$$

т. е. при ударе шары обмениваются скоростями.

б) Масса второго шара во много раз больше массы первого шара ($m_2 \gg m_1$). Тогда

$$u_1 \approx 2v_2 - v_1; \quad u_2 \approx v_2.$$

Если при этом второй шар до удара был неподвижен ($v_2 = 0$), то

$$u_1 = -v_1; \; u_2 = 0;$$

т. е. первый шар отскакивает от неподвижного массивного шара и движется в обратную сторону со скоростью $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{v}_1$.

4. Систему тел называют диссипативной, если ее механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс называют процессом **диссипации (рассеяния) энергии.** В качестве примера рассмотрим диссипацию энергии при абсолютно неупругом прямом центральном ударе двух поступательно движущихся тел.

При абсолютно неупругом ударе потенциальная энергия соударяющихся тел не изменяется, так как тела полностью неупруги. Поэтому изменение ΔW полной механической энергии системы соударяющихся тел равно изменению их кинетической энергии

$$\Delta W = \Delta W_к = \frac{(m_1 + m_2)\, u^2}{2} - \left[\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right].$$

Общая скорость тел после удара выражается формулой (2.19):

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Так как

$$u^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^2, \quad v_1^2 = \mathbf{v}_1^2 \text{ и } v_2^2 = \mathbf{v}_2^2,$$

то

$$\Delta W = \frac{(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)^2}{2\,(m_1 + m_2)} - \frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} - \frac{m_2 \mathbf{v}_2^2}{2},$$

или, после преобразований,

$$\Delta W = -\frac{m_1 m_2}{2\,(m_1 + m_2)}\, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 < 0, \tag{3.19}$$

где $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$— скорость первого тела по отношению ко второму перед ударом.

Уменьшение механической энергии рассматриваемой системы обусловлено неконсервативностью сил взаимодействия соударяющихся тел. При ударе неупругие тела приобретают деформацию, которая сохраняется и после завершения удара. Для осуществления такой деформации тел, называемой остаточной, необходимо совершать **работу деформации** $A_д$, т. е. затрачивать энергию. Опыт показывает, что работа деформации неупруго соударяющихся тел в точности равна убыли их полной механической энергии:

$$A_д = -\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2. \qquad (3.20)$$

Если второе тело до удара было неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$A_д = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W_{к_1}. \qquad (3.21)$$

Неупругий удар применяют для целей двоякого рода. Во-первых, для изменения формы тел (ковка и штамповка металла, раздробление тел и т. п.). В этом случае нужно, чтобы возможно большая часть кинетической энергии первого тела затрачивалась на совершение работы деформации (уравнение 3.21), т. е. чтобы масса неподвижного тела m_2 (например, наковальни вместе с куском металла) была во много раз больше массы ударяющего тела m_1 (например, молота).

Вторая цель состоит в перемещении тел после удара и преодолении при этом сопротивлений (забивка свай в землю, вбивание клиньев, гвоздей и т. д.). В этом случае выгодно, чтобы работа деформации была как можно меньше и чтобы общая кинетическая энергия обоих тел после удара $\left(\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}\right)$ была наибольшей. Для этого необходимо, чтобы масса ударяющего тела m_1 (копровой бабы, молотка) была во много раз больше массы второго тела m_2 (сваи, гвоздя).

5. На основе закона сохранения механической энергии замкнутой консервативной системы можно рассмотреть вопрос о равновесии такой системы. Говорят, что система тел находится **в равновесии, если** она может быть выведена из этого состояния только в результате внешнего воздействия. Например, система Земля — тело находится в равновесии, если тело неподвижно лежит на дне ямы или на горизонтальной вершине горы. Состояние равновесия называют **устойчивым, если** малое внешнее воздействие на систему вызывает малое изменение ее состояния. При этом в системе возникают внутренние силы, стремящиеся в о з в р а т и т ь систему в прежнее состояние. Например, тело, лежащее на дне ямы, находится в состоянии устойчивого равновесия. Состояние равновесия называют **неустойчивым**, если даже при сколь угодно малом внешнем воздействии система выводится из этого состояния. Например, тело, лежащее у края пропасти, падает вниз, если его слегка толкнуть, и не возвращается в первоначальное состояние неустойчивого равновесия.

Рассмотрим замкнутую систему Земля и шар, находящийся на склоне горы, профиль которой изображен на рис. 3.5. Легко видеть, что положение C шара соответствует неустойчивому равновесию системы, а положение B — состоянию устойчивого равновесия. Для того чтобы выкатить шар из ямы B, необходима работа A внешних сил, равная разности потенциальных энергий шара в положениях C и B: $A = W_{\text{п}_C} - W_{\text{п}_B}$. Чем глубже яма B, тем большую работу A против силы тяжести нужно произвести для поднятия шара из этой «потенциальной ямы». Из этого примера ясно, что в состоянии устойчивого равновесия замкнутой системы ее потенциальная энергия имеет минимум; в состоянии неустойчивого равновесия — максимум. Наиболее устойчивому состоянию системы соответствует абсолютный минимум ее потенциальной энергии, т. е. наименьшее из всех возможных значение ее потенциальной энергии.

Вопросы для повторения

1. В чем состоит различие между понятиями энергии и работы?
2. Какие существуют виды механической энергии? Дайте их определения.
3. Для каких систем тел справедлив закон сохранения механической энергии и как он формулируется?
4. Какой смысл вкладывают в термин «рассеяние энергии»?
5. Приведите примеры консервативной системы тел, диссипативной системы.
6. Каковы условия устойчивого равновесия замкнутой консервативной системы?

Примеры решения задач

Задача 3.1. Паровой молот массой 12 т падает со скоростью 5 м/с на наковальню, масса которой вместе с отковываемым куском железа 250 т. Определить производимую молотом работу расплющивания железа и энергию, потерянную на сотрясение фундамента, считая удар абсолютно неупругим.

Дано

$m_1 = 1{,}2 \cdot 10^4$ кг,
$v_1 = 5$ м/с,
$m_2 = 2{,}5 \cdot 10^5$ кг

$A_д$ — ? ΔW — ?

Решение

В момент удара молот обладает кинетической энергией $W'_к = m_1 v_1^2/2$, которая расходуется частично на работу $A_д$ расплющивания железа, частично на сотрясение фундамента (ΔW). По закону сохранения и превращения энергии

$$W'_к = A_д + \Delta W.$$

Так как удар неупругий, то скорости молота и наковальни после удара одинаковы и равны v. Энергия ΔW, потерянная на сотрясение фундамента, равна кинетической энергии молота и наковальни после удара:

$$\Delta W = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Ввиду массивности наковальни и кратковременности удара влиянием реакции фундамента в процессе удара можно пренебречь, т. е. считать систему молот — наковальня замкнутой. Поэтому для нахождения скорости v можно воспользоваться законом сохранения импульса (§ 2.5). По формуле (2.18)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$