

Рассмотрим замкнутую систему Земля и шар, находящийся на склоне горы, профиль которой изображен на рис. 3.5. Легко видеть, что положение C шара соответствует неустойчивому равновесию системы, а положение B — состоянию устойчивого равновесия. Для того чтобы выкатить шар из ямы B , необходима работа A внешних сил, равная разности потенциальных энергий шара в положениях C и B : $A = W_{пC} - W_{пB}$. Чем глубже яма B , тем большую работу A против силы тяжести нужно произвести для поднятия шара из этой «потенциальной ямы». Из этого примера ясно, что в состоянии устойчивого равновесия замкнутой системы ее потенциальная энергия имеет минимум; в состоянии неустойчивого равновесия — максимум. Наиболее устойчивому состоянию системы соответствует абсолютный минимум ее потенциальной энергии, т. е. наименьшее из всех возможных значение ее потенциальной энергии.

Вопросы для повторения

1. В чем состоит различие между понятиями энергии и работы?
2. Какие существуют виды механической энергии? Дайте их определения.
3. Для каких систем тел справедлив закон сохранения механической энергии и как он формулируется?
4. Какой смысл вкладывают в термин «рассеяние энергии»?
5. Приведите примеры консервативной системы тел, диссипативной системы.
6. Каковы условия устойчивого равновесия замкнутой консервативной системы?

Примеры решения задач

Задача 3.1. Паровой молот массой 12 т падает со скоростью 5 м/с на наковальню, масса которой вместе с отковываемым куском железа 250 т. Определить производимую молотом работу расплющивания железа и энергию, потерянную на сотрясение фундамента, считая удар абсолютно неупругим.

Д а н о

$$\begin{aligned} m_1 &= 1,2 \cdot 10^4 \text{ кг,} \\ v_1 &= 5 \text{ м/с,} \\ m_2 &= 2,5 \cdot 10^5 \text{ кг} \\ A_d &= ? \quad \Delta W = ? \end{aligned}$$

Р е ш е н и е

В момент удара молот обладает кинетической энергией $W'_k = m_1 v_1^2 / 2$, которая расходуется частично на работу A_d расплющивания железа, частично на сотрясение фундамента (ΔW). По закону сохранения и превращения энергии

$$W'_k = A_d + \Delta W.$$

Так как удар неупругий, то скорости молота и наковальни после удара одинаковы и равны v . Энергия ΔW , потерянная на сотрясение фундамента, равна кинетической энергии молота и наковальни после удара:

$$\Delta W = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Ввиду массивности наковальни и кратковременности удара влиянием реакции фундамента в процессе удара можно пренебречь, т. е. считать систему молот — наковальня замкнутой. Поэтому для нахождения скорости v можно воспользоваться законом сохранения импульса (§ 2.5). По формуле (2.18)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

До удара наковальня была неподвижна, так что $v_2 = 0$. Скорости v_1 и v направлены одинаково. Поэтому

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v,$$

откуда

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставим это значение v в выражение для ΔW :

$$\Delta W = \frac{(m_1 + m_2) m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Работа A_d расплющивания железа равна:

$$A_d = W'_k - \Delta W = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)},$$

или

$$A_d = \frac{m_1 v_1^2}{2} \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

1) проверка размерности результатов:

$$[\Delta W] = \frac{[m]^2 [v]^2}{[m]} = [m] [v]^2 = ML^2 T^{-2},$$

$$[A_d] = [m] [v^2] = ML^2 T^{-2}$$

2) вычисления:

$$\Delta W = \frac{(1,2 \cdot 10^4)^2 \cdot 25}{2 \cdot (1,2 \cdot 10^4 + 2,5 \cdot 10^5)} \text{ Дж} = 6,87 \cdot 10^8 \text{ Дж};$$

$$A_d = \frac{1,2 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot 25}{2 \cdot (1,2 + 25) \cdot 10^4} \text{ Дж} = 1,43 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Задача 3.2 Определить работу поднятия груза по наклонной плоскости, среднюю и максимальную мощности подъемного устройства, если масса груза 100 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол ее наклона к горизонту 30° , коэффициент трения 0,1 и ускорение при подъеме 1 м/с^2 . У основания наклонной плоскости груз находился в покое.

Д а н о

$$m = 100 \text{ кг},$$

$$s = 2 \text{ м},$$

$$\alpha = 30^\circ,$$

$$f = 0,1,$$

$$a = 1 \text{ м/с}^2$$

$$A - ? \quad N_{\text{ср}} - ?$$

$$N_{\text{макс}} - ?$$

Р е ш е н и е

На груз действуют три силы: сила тяжести P , сила тяги F и реакция наклонной плоскости, равная геометрической сумме двух ее составляющих, изображенных на рис. 3.7, — нормальной реакции R и силы трения $F_{\text{тр}}$. Силу тяжести тоже можно разложить на две составляющие — нормальную P_n и касательную P_τ .

По второму закону Ньютона

$$ma = F + P_n + P_\tau + F_{\text{тр}} + R.$$

Так как силы P_{τ} , $F_{\text{тр}}$ и F и ускорение груза a направлены вдоль наклонной плоскости, то нормальные к плоскости силы P_n и R взаимно уравновешиваются, т. е. $P_n + R = 0$. Силы P_{τ} и $F_{\text{тр}}$ противоположны по направлению силе F и ускорению a , поэтому

$$ma = F - P_{\tau} - F_{\text{тр}},$$

где $P_{\tau} = mg \sin \alpha$, а $F_{\text{тр}} = f P_n = f mg \cos \alpha$, так что $F = m(a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha)$.

Сила тяги F постоянна по величине и направлена вдоль перемещения груза. Поэтому совершаемая ею работа

$$A = Fs = ms(a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha).$$

Мощность N , развиваемая подъемным устройством, по формуле (3.4) равна:

$$N = Fv = mv(a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha),$$

где v — скорость груза.

Груз движется равноускоренно с начальной скоростью, равной нулю, так что $v = at$.

Поэтому мощность N в процессе подъема груза возрастает. Средняя и максимальная мощности, развиваемые подъемным устройством, равны:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t_0} \quad \text{и} \quad N_{\text{макс}} = Fv_{\text{макс}} = Fat_0,$$

где t_0 — время подъема груза

По формуле (1.18)

$$t_0 = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Следовательно,

$$N_{\text{ср}} = A \sqrt{\frac{a}{2s}} = m \sqrt{\frac{sa}{2}} (a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha),$$

$$N_{\text{макс}} = m \sqrt{2sa} (a + g \sin \alpha + fg \cos \alpha) = 2N_{\text{ср}}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

1) проверка размерности результатов:

$$[A] = [m][s][a] = MLLT^{-2} = ML^2T^{-2};$$

$$[N_{\text{ср}}] = [m][s]^{1/2}[a]^{3/2} = ML^{1/2}(LT^{-2})^{3/2} = ML^2T^{-2};$$

2) вычисления:

$$A = 100 \cdot 2 \cdot (1 + 9,81 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{3}/2) \text{ Дж} = 1350 \text{ Дж},$$

$$N_{\text{ср}} = 100 \cdot (1 + 9,81 + 0,5 + 0,1 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{3}/2) \text{ Вт} = 675 \text{ Вт},$$

$$N_{\text{макс}} = 2N_{\text{ср}} = 1350 \text{ Вт},$$