

## Глава IV

### ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

#### § 4.1. Основной закон динамики вращательного движения

1. Мы уже говорили о том, что любое тело или систему тел можно мысленно представить в виде системы материальных точек — достаточно малых частей этих тел. Рассмотрим произвольную механическую систему, состоящую из  $n$  материальных точек. Пусть  $m_i$  — масса  $i$ -й точки системы, а  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, проведенный в эту точку из начала координат  $O$  неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим через  $\mathbf{F}_{ik}$  силу, действующую на  $i$ -ю точку со стороны  $k$ -й материальной точки системы, а через  $\mathbf{F}_i^{\text{внеш}}$  — равнодействующую всех внешних сил, приложенных к  $i$ -й точке.

По второму закону Ньютона уравнение движения этой материальной точки имеет вид

$$\frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i^{\text{внеш}},$$

где  $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$  — скорость  $i$ -й точки, а индекс суммирования  $k$  пробегает все значения от 1 до  $n$ , причем  $\mathbf{F}_{ii} = 0$ , так как  $i$ -я точка сама на себя не действует.

Умножим обе части этого равенства векторно на  $\mathbf{r}_i$ :

$$\left[ \mathbf{r}_i, \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right] = \left[ \mathbf{r}_i, \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_{ik} \right] + \left[ \mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{внеш}} \right]. \quad (4.1)$$

Легко видеть, что знак производной по времени в левой части этого уравнения можно вынести за знак векторного произведения. В самом деле,

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = \left[ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, m_i \mathbf{v}_i \right] + \left[ \mathbf{r}_i, \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right] = \left[ \mathbf{r}_i, \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right],$$

потому что

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, m_i \mathbf{v}_i \right] = [\mathbf{v}_i, m_i \mathbf{v}_i] = 0,$$

как векторное произведение двух одинаково направленных векторов.

Следовательно, уравнение (4.1) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = \sum_{k=1}^n [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ik}] + [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{внеш}}]. \quad (4.1')$$

2. Векторное произведение радиуса-вектора  $\mathbf{r}_i$  материальной точки на ее импульс  $m_i \mathbf{v}_i$  называют **моментом импульса  $\mathbf{L}_i$**  этой материальной точки относительно точки  $O$ :

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i]. \quad (4.2)$$

Вектор  $\mathbf{L}_i$  иногда называют также **моментом количества движения материальной точки**. Он направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы  $\mathbf{r}_i$  и  $m_i \mathbf{v}_i$  и образует с ними **правую тройку векторов** (при наблюдении из конца  $\mathbf{L}_i$  видно, что вращение по кратчайшему расстоянию от  $\mathbf{r}_i$  к  $m_i \mathbf{v}_i$  происходит против часовой стрелки, рис. 4.1)

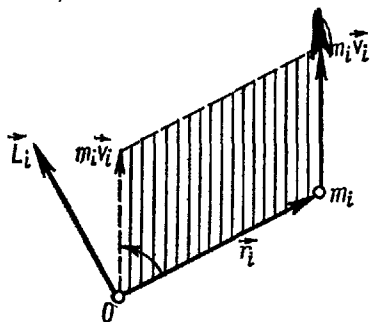


Рис. 4.1.

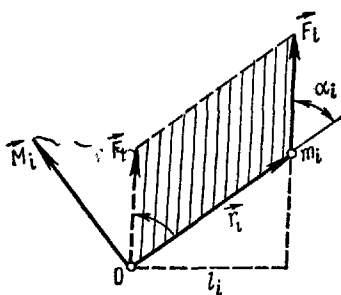


Рис. 4.2.

Векторное произведение радиуса-вектора  $\mathbf{r}_i$ , проведенного в точку приложения силы  $\mathbf{F}_i$ , на эту силу называют **моментом  $\mathbf{M}_i$  силы  $\mathbf{F}_i$**  относительно точки  $O$ :

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]. \quad (4.3)$$

Векторы  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{F}_i$  и  $\mathbf{M}_i$  образуют правую тройку (рис. 4.2). Численное значение момента силы  $\mathbf{F}_i$  равно

$$M_i = F_i r_i \sin \alpha_i = F_i l_i, \quad (4.3')$$

где  $\alpha_i$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{F}_i$ , а  $l_i = r_i \sin \alpha_i$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию действия силы  $\mathbf{F}_i$ . Величина  $l_i$  называется **плечом силы  $\mathbf{F}_i$** . Если линия действия силы проходит через точку  $O$ , то  $l_i = 0$  и момент силы относительно точки  $O$  равен нулю.

3. Из (4.1'), (4.2) и (4.3) следует, что скорость изменения момента импульса  $i$ -й материальной точки равна

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_{ik} + \mathbf{M}_i^{\text{внеш}}. \quad (4.4)$$

Сложим почленно все эти уравнения, записанные для каждой из  $n$  материальных точек системы:

$$\sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik} + \sum_{i=1}^n M_i^{\text{внеш}}. \quad (4.5)$$

Векторную сумму моментов  $M_i^{\text{внеш}}$  всех внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы, называют **резльтирующим, или главным, моментом  $M$  внешних сил относительно точки  $O$** :

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n M_i^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{внеш}}]. \quad (4.6)$$

Векторную сумму моментов импульса  $L_i$  всех материальных точек системы называют **моментом импульса (количества движения)  $L$  системы относительно точки  $O$** :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i]. \quad (4.7)$$

Так как производная от суммы равна сумме производных от всех слагаемых, то

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt}. \quad (4.7')$$

Наконец, векторная сумма моментов относительно точки  $O$  всех внутренних сил  $\mathbf{F}_{ik}$  взаимодействия между материальными точками системы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik} = 0. \quad (4.8)$$

Это связано с тем, что по третьему закону Ньютона силы  $\mathbf{F}_{ik}$  и  $\mathbf{F}_{ki}$  численно равны, имеют общую линию действия, но направлены во взаимно противоположные стороны. Поэтому их моменты  $\mathbf{M}_{ik} = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ik}]$  и  $\mathbf{M}_{ki} = [\mathbf{r}_k, \mathbf{F}_{ki}]$  относительно точки  $O$  численно равны и противоположны по направлению (на рис. 4.3 точки  $m_i$ ,  $m_k$  и  $O$  лежат в горизонтальной плоскости, а векторы  $\mathbf{M}_{ik}$  и  $\mathbf{M}_{ki}$  перпендикулярны к этой плоскости). Действительно,  $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{ki}$ , где  $\mathbf{r}_{ki}$  — вектор, проведенный из точки  $m_i$  в точку  $m_k$ . Поэтому

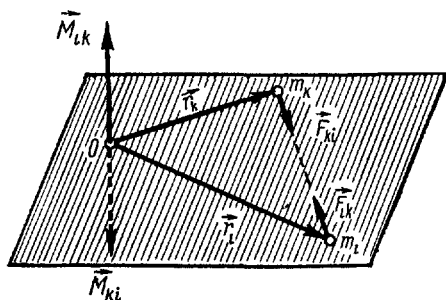


Рис. 4.3.

$$M_{ki} = [r_i F_{ki}] + [r_{ki}, F_{ki}] = -[r_i, F_{ik}] = -M_{ik},$$

так как векторное произведение векторов  $r_{ki}$  и  $F_{ki}$ , направленных вдоль одной прямой, равно нулю.

На основании соотношений (4.6), (4.7') и (4.8) уравнение (4.5) можно записать в следующей форме:

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad (4.9)$$

Таким образом, *скорость изменения момента импульса системы относительно неподвижной точки равна результирующему моменту относительно той же точки всех внешних сил, действующих на систему.*

Соотношение (4.9) справедливо, в частности, для твердого тела, закрепленного в точке  $O$ . В этом случае оно выражает **основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.** Из него следует, что момент импульса  $L$  является основной динамической характеристикой тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

4. Пусть теперь твердое тело закреплено в двух неподвижных точках  $O$  и  $O_1$  так, что оно может вращаться вокруг неподвижной оси  $Oz$ , проходящей через эти точки. В этом случае составляющие момента  $M$  относительно точки  $O$ , направленные вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , компенсируются соответствующими моментами сил реакции закрепления в точке  $O_1$ . Поэтому вращение тела вокруг оси  $Oz$  происходит под действием составляющей  $M_z$  момента внешних сил относительно точки  $O$ . Из (4.9) следует, что уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (4.10)$$

где  $L_z$  и  $M_z$  — составляющие векторов момента импульса тела и результирующего момента внешних сил относительно точки  $O$ , направленные вдоль неподвижной оси  $Oz$  вращения тела и называемые, соответственно, моментом импульса тела относительно оси  $Oz$  и результирующим моментом внешних сил относительно той же оси.

Уравнение (4.10) выражает **основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:**

*скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело.*

Из этого закона следует, что основной динамической характеристикой тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, является момент импульса тела относительно этой оси.

5. Найдем выражение для момента импульса  $L_z$  тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega$ . Так как

$$L = \sum_{i=1}^n L_i \quad \text{то} \quad L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz}.$$

Из рис. 4.4 видно, что радиус-вектор  $i$ -й материальной точки

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\rho}_i,$$

где  $\mathbf{b}_i$  — вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $O_i$ , лежащую на оси вращения  $Oz$  и являющуюся центром окружности, по которой движется рассматриваемая  $i$ -я точка тела. Поэтому

$$\mathbf{L}_i = [m_i \mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = [\mathbf{b}_i, m_i \mathbf{v}_i] + [\boldsymbol{\rho}_i, m_i \mathbf{v}_i].$$

Вектор  $[\mathbf{b}_i, m_i \mathbf{v}_i]$  перпендикулярен к вектору  $\mathbf{b}_i$ , т. е. его составляющая вдоль оси  $Oz$  равна нулю. Векторы  $\boldsymbol{\rho}_i$  и  $\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}_i]$  (см. формулу (1.22)) взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела. Поэтому вектор  $[\boldsymbol{\rho}_i, m_i \mathbf{v}_i]$  численно равен  $\rho_i m_i v_i = m_i \rho_i^2 \omega$  и направлен вдоль оси  $Oz$  вращения тела в ту же сторону, что и вектор  $\boldsymbol{\omega}$ . Таким образом,

$$L_{iz} = m_i \rho_i^2 \omega$$

и

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2. \quad (4.11)$$

Сумму произведений массы каждой материальной точки тела на квадрат ее расстояния до оси называют **моментом инерции тела относительно этой оси**. Момент инерции относительно оси  $Oz$  равен

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2. \quad (4.12)$$

Следовательно,

$$\mathbf{L}_z = J_z \boldsymbol{\omega}. \quad (4.13)$$

Момент импульса тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость вращения вокруг этой оси.

При вычислении момента инерции тела его мысленно разбивают на бесконечно большое число бесконечно малых элементов с массами  $dm$ . Поэтому в формуле (4.12) сумму  $\sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2$  заменяют интегралом:

$$J_z = \int_0^m \rho^2 dm, \quad (4.12')$$

где  $\rho$  — расстояние от элемента  $dm$  до оси  $Oz$ .

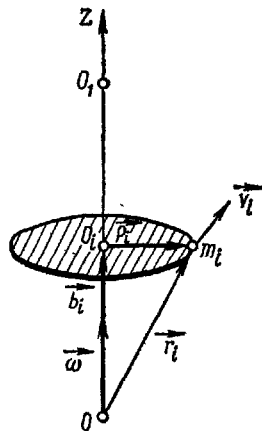


Рис. 4.4.

6. Неподвижная ось вращения может проходить как через центр инерции тела (например, ось вращения маховика, турбины, ротора электродвигателя и т. д.), так и вне его (например, ось вращения рычага).

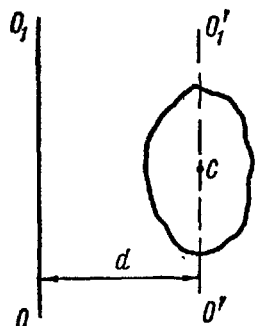


Рис. 4.5.

Можно доказать следующую теорему о переносе осей инерции:

*момент инерции  $J$  тела относительно произвольной оси  $OO_1$  равен сумме момента инерции  $J_C$  тела относительно оси  $O'O_1'$ , проведенной через центр инерции  $C$  тела параллельно  $OO_1$ , и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $d$  между этими осями (рис 4.5):*

$$J = J_C + md^2. \quad (4.14)$$

В самом деле,

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 \quad \text{и} \quad J_C = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^{*2}$$

где  $\rho_i$  и  $\rho_i^*$  — расстояния от  $i$ -й материальной точки массой  $m_i$  до осей  $OO_1$  и  $O'O_1'$ . Проведем ось координат  $Ox$  так, чтобы она пересекала оси  $OO_1$  и  $O'O_1'$  и была перпендикулярна к ним (см. рис. 4.6,

на котором оси  $OO_1$  и  $O'O_1'$  расположены перпендикулярно к плоскости чертежа). Тогда по теореме косинусов

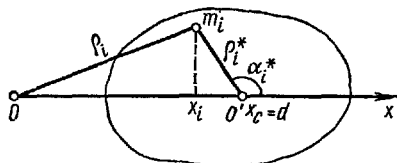


Рис. 4.6.

$$\rho_i^2 = \rho_i^{*2} + d^2 + 2d\rho_i^* \cos \alpha_i^*,$$

причем

$$\rho_i^* \cos \alpha_i^* = x_i - x_C,$$

где  $x_i$  и  $x_C$  — абсциссы  $i$ -й точки тела и его центра инерции  $C$ . Таким образом, момент инерции тела относительно оси  $OO_1$  можно представить в виде

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^{*2} + d^2 \sum_{i=1}^n m_i + 2d \left[ \sum_{i=1}^n m_i x_i - x_C \sum_{i=1}^n m_i \right].$$

Из определения понятия центра инерции (см. формулы (2.10) и (2.10')) следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Поэтому для момента инерции тела  $J$ , действительно, справедливо соотношение (4.14):

$$J = J_C + md^2.$$

В таблице 1 приведены формулы для вычисления моментов инерции однородных тел простейшей формы. Из выражений (4.12') и (4.14), а также из данных таблицы 1 видно, что момент инерции тела зависит не только от его массы, но и от ее распределения относительно оси вращения. Например, момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец, в 4 раза больше, чем момент инерции этого же стержня относительно его оси симметрии.

Т а б л и ц а 1

Тело	Положение оси $Oz$	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса $R$ , имеющий массу $m$	Ось симметрии	$J_z = mR^2$
Сплошной цилиндр (или диск) радиуса $R$ , имеющий массу $m$	Ось симметрии	$J_z = \frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень, имеющий длину $l$ и массу $m$ Тот же стержень	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$J_z = \frac{1}{12} ml^2$
	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$J_z = \frac{1}{3} ml^2$
Шар радиуса $R$ , имеющий массу $m$ Тот же шар	Ось проходит через центр шара	$J_z = \frac{2}{5} mR^2$
	Ось проходит на расстоянии $d$ от центра шара	$J_z = m \left( \frac{2}{5} R^2 + d^2 \right)$

7. Из формулы (4.13) следует, что основное уравнение (4.10) динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Oz$ , можно представить в такой форме

$$\frac{d}{dt} (J_z \omega) = M_z. \quad (4.15)$$

Если тело абсолютно твердое, то его момент инерции  $J_z$  не зависит от времени. Поэтому

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \quad \text{или} \quad J_z \varepsilon = M_z, \quad (4.16)$$

где  $\varepsilon$  — угловое ускорение тела.

Из уравнения (4.16) видно, что *угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси  $Oz$ , прямо пропорционально результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно той же оси.*

Таким образом, момент инерции тела является мерой его инертности во вращательном движении вокруг неподвижной оси.

8. Зависимость углового ускорения твердого тела от его момента инерции можно продемонстрировать на опыте с помощью прибора Обербека (рис. 4.7). Крестовина, состоящая из четырех взаимно перпендикулярных одинаковых стержней с надетыми и закрепленными на них четырьмя одинаковыми цилиндрическими грузами  $B$ , может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$ . Грузы  $B$  расположены на равных расстояниях от оси  $O$ . Крестовина жестко скреплена со шкивом  $A$ , на котором намотана нить  $D$ . Один конец нити закреплен на шкиве, а к другому привязан груз  $C$ . Если груз  $C$  отпустить, то он будет падать вниз, натягивая нить и приводя крестовину во вращательное движение.

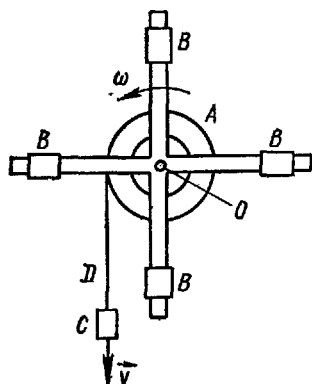


Рис. 4.7.

Изменяя расстояния  $r$  от центров грузов  $B$  до оси вращения  $O$ , можно убедиться в том, что угловое ускорение крестовины тем меньше, чем больше  $r$ , т. е. чем больше ее момент инерции относительно оси  $O$ .

Обычно шкив  $A$  имеет две цилиндрические поверхности с разными радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Если нить  $D$  сначала намотать на часть шкива с радиусом  $R_1$ , а затем — с радиусом  $R_2 > R_1$ , то оказывается, что в первом случае угловое ускорение крестовины

меньше, чем во втором. Это свидетельствует о том, что угловое ускорение прямо пропорционально моменту относительно оси  $O$ , создаваемому силой натяжения нити.

## § 4.2. Кинетическая энергия вращающегося тела

1. Кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех  $n$  материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить:

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (4.17)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega$ , то линейная скорость  $i$ -й точки равна:

$$v_i = \omega \rho_i,$$

где  $\rho_i$  — расстояние от этой точки до оси вращения. Следовательно,

$$W_{k. \text{ вр.}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad (4.18)$$

где  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси вращения.