8. Зависимость углового ускорения твердого тела от его момента инерции можно продемонстрировать на опыте с помощью прибора Обербека (рис. 4.7). Крестовина, состоящая из четырех взаимно перпендикулярных одинаковых стержней с надетыми и закрепленными на них четырьмя одинаковыми цилиндрическими грузами B, может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Грузы B расположены на равных расстояниях от оси O. Крестовина жестко скреплена со шкивом A, на котором намотана нить D. Один конец нити закреплен на шкиве, а к другому привязан груз C. Если груз C отпустить, то он будет падать вниз, натягивая нить и приводя крестовину во вращательное движение.

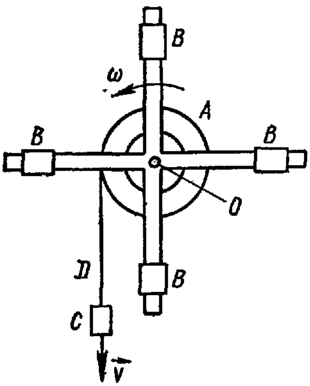

Рис. 4.7.

Изменяя расстояние r от центров грузов B до оси вращения O, можно убедиться в том, что угловое ускорение крестовины тем меньше, чем больше r, т. е. чем больше ее момент инерции относительно оси O.

Обычно шкив A имеет две цилиндрические поверхности с разными радиусами R_1 и R_2. Если нить D сначала намотать на часть шкива с радиусом R_1, а затем — с радиусом $R_2 > R_1$, то оказывается, что в первом случае угловое ускорение крестовины меньше, чем во втором. Это свидетельствует о том, что угловое ускорение прямо пропорционально моменту относительно оси O, создаваемому силой натяжения нити.

§ 4.2. Кинетическая энергия вращающегося тела

1. Кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить:

$$W_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{4.17}$$

Если тело вращается вокруг н е п о д в и ж н о й оси Oz с угловой скоростью ω, то линейная скорость i-й точки равна:

$$v_i = \omega \rho_i,$$

где ρ_i — расстояние от этой точки до оси вращения. Следовательно,

$$W_{\text{к. вр.}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}, \tag{4.18}$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения.

Сопоставление формулы (4.18) с выражением для кинетической энергии тела, движущегося поступательно со скоростью v:

$$W_{\text{к. пост.}} = \frac{mv^2}{2},$$

служит подтверждением уже высказанного выше утверждения о том, что мерой инертности тела во вращательном движении является момент инерции тела.

2. Если момент $\mathbf{M}_z$ внешних сил относительно неподвижной оси вращения твердого тела отличен от нуля, то угловая скорость и кинетическая энергия тела изменяются. Из формулы (3.13) следует, что изменение кинетической энергии тела за малый промежуток времени dt:

$$dW_{\text{к}} = \delta A,$$

где δA — элементарная работа, совершаемая за время dt одними только внешними силами, приложенными к телу, так как тело не деформируется и внутренние силы работы не совершают. Выражение (4.18) для кинетической энергии вращающегося тела перепишем в форме

$$W_{\text{к}} = \frac{J_z}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}).$$

Тогда

$$\delta A = dW_{\text{к}} = J_z(\boldsymbol{\omega}, d\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}, J_z d\boldsymbol{\omega}),$$

или, учитывая соотношение (4.16),

$$\delta A = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}_z dt) = M_z \omega dt = M_z d\varphi, \qquad (4.19)$$

где M_z— проекция результирующего момента внешних сил на направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела, а $d\varphi = \omega dt$ — угол поворота тела за рассматриваемый малый промежуток времени dt.

3. Вращение тела вокруг неподвижной точки в каждый момент времени можно рассматривать как его вращение вокруг некоторой **мгновенной оси**, проходящей через эту точку. Поэтому кинетическая энергия тела в этом случае

$$W_{\text{к}} = \frac{J_{\text{м}}\omega^2}{2}, \qquad (4.20)$$

где $J_{\text{м}}$ — момент инерции тела относительно мгновенной оси, ω — соответствующая угловая скорость. В общем случае положение мгновенной оси вращения по отношению к системе координат, связанной с телом, в процессе вращения изменяется. Следовательно, момент инерции $J_{\text{м}}$ зависит от времени.

4. В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений — поступательного со скоростью, равной скорости $\mathbf{v}_C$ центра инерции тела, и вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. При этом

выражение (4.17) для кинетической энергии тела преобразуется к виду

$$W_к = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \tag{4.20'}$$

где J_C — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

§ 4.3. Закон сохранения момента импульса

1. Для замкнутой системы тел момент **M** внешних сил всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему. Поэтому из уравнения (4.9) следует, что для такой системы

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{L} = \text{const} \tag{4.21}$$

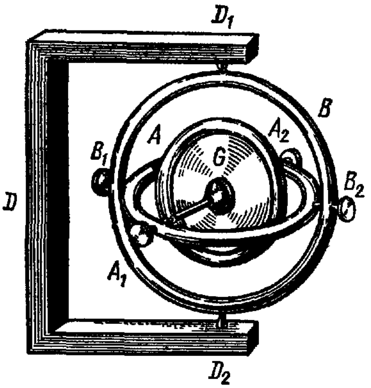

Рис. 4.8.

Этот результат называют **законом сохранения момента импульса:** *момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.*

Закон сохранения момента импульса, подобно законам сохранения импульса и энергии, является одним из фундаментальных законов природы. В теоретической физике доказано, что этот закон — следствие изотропности пространства. Изотропность пространства означает, что при повороте в нем замкнутой системы как целого (иначе говоря, при изменении ориентации осей координат) физические свойства замкнутой системы и законы ее движения не изменяются.

2. Если на тёло, вращающееся вокруг неподвижной точки O, внешние силы действуют, но результирующий момент **M** этих сил относительно точки O тождественно равен нулю, то, как видно из (4.9), момент импульса тела **L** относительно точки O остается постоянным. В справедливости этого закона можно убедиться на опыте с уравновешенным гироскопом, имеющим три степени свободы. **Гироскопом** называют быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп имеет три степени свободы, если он закреплен таким образом, что может совершать любой поворот вокруг некоторой неподвижной точки, называемой **центром подвеса.** Если центр подвеса гироскопа совпадает с его центром тяжести, то результирующий момент сил тяжести всех частей гироскопа относительно центра подвеса равен нулю. Такой гироскоп назы-