выражение (4.17) для кинетической энергии тела преобразуется к виду

$$W_{\text{к}} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \tag{4.20'}$$

где J_C — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

§ 4.3. Закон сохранения момента импульса

1. Для замкнутой системы тел момент **M** внешних сил всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему. Поэтому из уравнения (4.9) следует, что для такой системы

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{L} = \text{const} \tag{4.21}$$

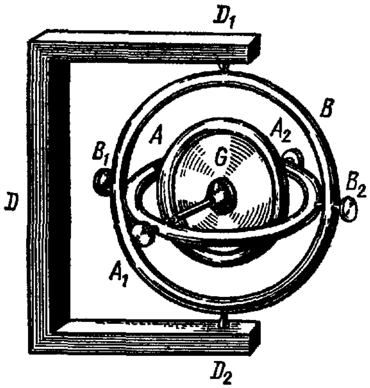

Рис. 4.8.

Этот результат называют **законом сохранения момента импульса:** *момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.*

Закон сохранения момента импульса, подобно законам сохранения импульса и энергии, является одним из фундаментальных законов природы. В теоретической физике доказано, что этот закон — следствие изотропности пространства. Изотропность пространства означает, что при повороте в нем замкнутой системы как целого (иначе говоря, при изменении ориентации осей координат) физические свойства замкнутой системы и законы ее движения не изменяются.

2. Если на тéло, вращающееся вокруг неподвижной точки O, внешние силы действуют, но результирующий момент **M** этих сил относительно точки O тождественно равен нулю, то, как видно из (4.9), момент импульса тела **L** относительно точки O остается постоянным. В справедливости этого закона можно убедиться на опыте с уравновешенным гироскопом, имеющим три степени свободы. **Гироскопом** называют быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп имеет три степени свободы, если он закреплен таким образом, что может совершать любой поворот вокруг некоторой неподвижной точки, называемой **центром подвеса.** Если центр подвеса гироскопа совпадает с его центром тяжести, то результирующий момент сил тяжести всех частей гироскопа относительно центра подвеса равен нулю. Такой гироскоп назы-

вают **уравновешенным.** На рис. 4.8 показан простейший уравновешенный гироскоп, имеющий три степени свободы. Гироскоп G быстро вращается во внутренней кольцевой обойме A вокруг оси A_1A_2, которая совпадает с осью симметрии гироскопа и проходит через его центр тяжести C. Обойма A в свою очередь может свободно вращаться во внешней обойме B вокруг оси B_1B_2 перпендикулярной к A_1A_2. Наконец, обойма B может свободно вращаться в стойке D вокруг оси D_1D_2, перпендикулярной к осям A_1A_2 и B_1B_2. Все три оси пересекаются в центре подвеса, совпадающем с центром тяжести гироскопа C.

На опыте с таким гироскопом легко убедиться в том, что при любых поворотах стойки D ось вращения гироскопа A_1A_2 сохраняет неизменное направление по отношению к лабораторной системе отсчета. Объяснение этого явления состоит в следующем Момент относительно точки подвеса C всех внешних сил, прикладываемых к гироскопу через стойку D при ее поворотах, равен только моменту сил трения (момент силы тяжести равен нулю, так как гироскоп уравновешен). Обычно момент сил трения очень мал, так что за малый промежуток времени, в течение которого производится поворот стойки D, момент импульса гироскопа $\mathbf{L}$ относительно центра подвеса C практически не изменяется. Так как гироскоп симметричен и вращается вокруг своей оси симметрии, то его момент импульса $\mathbf{L}$ направлен вдоль оси вращения A_1A_2. Поэтому при всевозможных поворотах стойки D ориентация оси вращения гироскопа должна сохраняться неизменной.

3. Из основного закона динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz (уравнение 4 10), следует **закон сохранения момента импульса тела относительно этой оси:**

если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тела тождественно равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси не изменяется в процессе движения, т. е. если $\mathbf{M}_z \equiv 0$, то

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{L}_z = \text{const}, \tag{4.22}$$

или, на основании соотношения (4.13),

$$J_z\omega = \text{const}, \tag{4 22'}$$

где ω — угловая скорость тела, J_z— его момент инерции относительно оси вращения.

Этот закон может быть обобщен на любую н е з а м к н у т у ю систему тел: *если результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе, относительно какой-либо неподвижной оси тождественно равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси не изменяется с течением времени.*

В частности, этот закон справедлив для з а м к н у т о й системы тел.

4. Справедливость закона сохранения момента импульса относительно неподвижной оси вращения можно продемонстрировать на ряде

опытов. На рис. 4.9 изображена квадратная рамка $ABCD$, изготовленная из тонких стержней. На стержни AD и CD надеты одинаковые цилиндрические грузы K, имеющие возможность свободно скользить по этим стержням. Грузы K удерживаются в верхнем положении прикрепленной к ним ниткой N, перекинутой через крючки E в рамке.

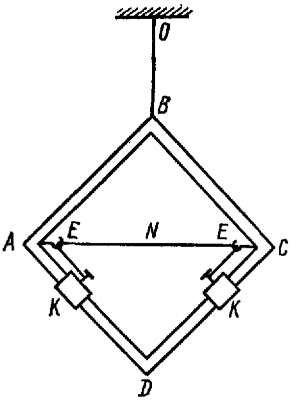

Рис. 4.9.

Рамка подвешена на неупругой нити BO. Если рамку привести во вращение вокруг вертикальной оси BD, а затем нитку N пережечь, то грузы K опускаются по стержням AD и CD вниз, приближаясь к оси вращения, а угловая скорость вращения рамки заметно возрастает. Это связано с тем, что момент внешних сил — сил тяжести, приложенных к рамке и грузам, относительно неподвижной оси BD равен нулю. Поэтому произведение момента инерции рамки с грузами (относительно оси BD) на ее угловую скорость до ($J_1\omega_1$) и после пережигания нитки N ($J_2\omega_2$) должно остаться неизменным: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$. Так как $J_2 < J_1$, то $\omega_2 > \omega_1$.

Аналогичное явление наблюдается в опыте со скамьей Жуковского, изображенном на рис. 4.10. **Скамьей Жуковского** называют горизонтальную площадку, свободно вращающуюся без трения вокруг неподвижной вертикальной оси OO_1. Человек, стоящий на скамейке, держит в вытянутых руках гимнастические гантели и вращается вместе со скамейкой вокруг оси OO_1. Приближая гантели к себе, человек уменьшает момент инерции системы и угловая скорость ее вращения возрастает. По закону сохранения момента импульса относительно оси OO_1

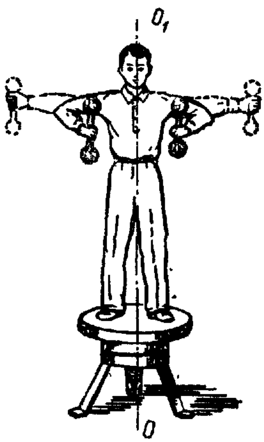

Рис. 4.10.

$$(J_0 + 2mr_1^2)\omega_1 = (J_0 + 2mr_2^2)\omega_2, \qquad (4.23)$$

где J_0 — момент инерции человека и скамьи; $2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ — момент инерции гантелей в первом и во втором положениях; ω_1 и ω_2 — соответствующие этим положениям гантелей угловые скорости системы; m — масса одной гантели; r_1 и r_2 — расстояния от гантелей до оси OO_1.

В рассмотренном опыте изменение момента инерции системы связано с изменением ее кинетической энергии, равным

$$\Delta W_к = W_{к_2} - W_{к_1} = \frac{(J_0 + 2mr_2^2)\,\omega_2^2}{2} - \frac{(J_0 + 2mr_1^2)\,\omega_1^2}{2}.$$

Воспользовавшись выражением для угловой скорости ω_2, полученным из формулы (4.23):

$$\omega_2 = \frac{J_0 + 2mr_1^2}{J_0 + 2mr_2^2}\,\omega_1,$$

найдем после несложных преобразований

$$\Delta W_к = \frac{J_0 + 2mr_1^2}{2}\,\omega_1(\omega_2 - \omega_1) \neq 0. \tag{4.24}$$

Это изменение кинетической энергии системы равно работе, совершаемой человеком при перемещении гантелей.

Закон сохранения момента импульса используют балерины, мастера фигурного катания и другие для выполнения различных фигур, связанных с изменением угловой скорости их вращения вокруг вертикальной оси.

Рассмотрим еще один опыт со скамьей Жуковского. Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и держит в руках ось массивного колеса так, что она является продолжением оси вращения скамейки (рис. 4.11). Вначале колесо не вращается, затем человек раскручивает его до угловой скорости ω_1. При этом он сам вместе со скамьей приходит во вращение в обратном направлении с угловой скоростью ω_2, которая, как показывает опыт, находится в полном согласии с законом сохранения момента импульса системы:

$$\omega_2 = -\frac{J_1}{J_2}\,\omega_1,$$

Рис. 4.11.

где J_1 — момент инерции колеса и J_2 — момент инерции человека и скамейки.

Человек, стоящий на идеально гладком полу, не может повернуться вокруг вертикальной оси, пользуясь для этого обычными приемами, т. е. отталкиваясь ногами от пола. Однако если он поднимет вверх руку и будет вращать ее вокруг вертикальной оси, то он сам начнет вращаться в противоположном направлении.

Вопросы для повторения

1. Что называют моментом силы и моментом импульса тела относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси?
2. Какая физическая величина служит основной динамической характеристикой вращающегося тела?
3. От чего зависит момент инерции тела? Какую роль он играет во вращательном движении?
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса и проиллюстрируйте его примерами.