Примеры решения задач

Задача 4.1[1]. Рамка может вращаться вокруг проходящей через ее центр тяжести вертикальной оси Oz. В рамке симметрично относительно оси Oz на расстояниях $l = 0{,}15$ м от нее укреплены вертикальные оси двух одинаковых дисков, имеющих вес $P = 96{,}2$ Н каждый (рис. 4.12). Момент инерции рамки относительно оси Oz равен $J_1 = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг · м²; момент инерции каждого диска относительно собственной оси равен $J_2 = 9{,}81 \cdot 10^{-2}$ кг · м². Вначале система находится в покое, а затем диски начинают вращаться в одну сторону с одинаковыми угловыми скоростями, делая по $n_2 = 10$ об/с относительно рамки. Это осуществляется имеющимся в системе, но не показанным на рисунке часовым механизмом, отпускающим в некоторый момент первоначально напряженную пружину. Определить угловую скорость рамки.

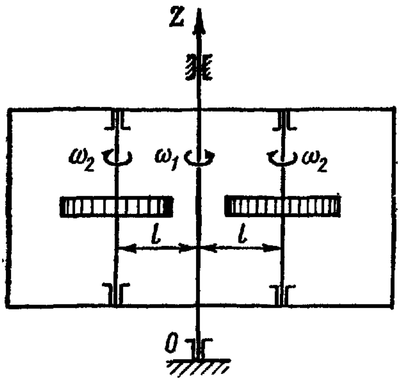

Рис. 4.12.

Дано

$P = 96{,}2$ Н,
$l = 0{,}15$ м,
$J_1 = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг·м²,
$J_2 = 9{,}81 \cdot 10^{-2}$ кг · м²,
$n_2 = 10$ об/с

ω_1 — ?

Решение

Момент относительно оси Oz параллельных ей сил тяжести частей системы равен нулю. Следовательно, к системе можно применить закон сохранения момента импульса: момент импульса данной системы относительно оси Oz остается неизменным и равным нулю как до, так и после приведения в движение обоих дисков. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выразить момент импульса системы относительно оси Oz. Он складывается из: а) момента импульса рамки $J_1\omega_1$, где ω_1 — угловая скорость рамки, б) момента импульса двух дисков, связанного с их вращением вокруг оси Oz вместе с рамкой и равного $2(J_2 + Pl^2/g)\omega_1$, в) момента импульса двух дисков, связанного с их вращением с угловой скоростью ω_2 вокруг собственных осей и равного $2J_2\omega_2$. Итак, имеем

$$J_1\omega_1 + 2(J_2 + Pl^2/g)\omega_1 + 2J_2\omega_2 = 0$$

или

$$\omega_1(J_1 + 2J_2 + 2Pl^2/g) = -2J_2\omega_2.$$

Скобка, стоящая в левой части этого уравнения, и J_2 — величины положительные. Поэтому знак минус в правой части уравнения указывает лишь на то, что рамка и диски вращаются в противоположные стороны, и в дальнейших расчетах он может быть опущен.

Заменив $\omega_2 = 2\pi n_2$, получим

$$\omega_1 = \frac{4\pi J_2 n_2}{J_1 + 2(J_2 + Pl^2/g)}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

[1] Содержание задачи 4.1 заимствовано из кн. Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье. Курс теоретической механики, т. II, ГТТИ, 1954, стр. 175.

1) проверка размерности результата:

$$[\omega_1] = \frac{[J_2][n_2]}{[J_1]} = [n_2] = T^{-1};$$

2) вычисление результата:

$$\omega_1 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{4{,}9 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot \left(9{,}81 \cdot 10^{-2} + \frac{96{,}2}{9{,}81} 0{,}15^2\right)} \text{ рад/с} = 17{,}9 \text{ рад/с}.$$

Задача 4.2. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный диск. Найти ускорение центра диска. Решить задачу в общем виде, полагая, что вначале диск был неподвижен, а трением качения можно пренебречь.

Решение

Пусть к некоторому моменту времени t центр тяжести диска прошел расстояние $BC = x$ от вершины наклонной плоскости (рис. 4.13). При этом потенциальная энергия диска изменилась на величину $\Delta W_п = -mgx \sin \alpha$. Сила трения покоя, действующая на диск со стороны наклонной плоскости, работы не совершает, так как мгновенная скорость точки A приложения этой силы равна нулю. Следовательно, для диска справедлив закон сохранения механической энергии. Кинетическая энергия диска в момент времени t

$$W_к = -\Delta W_п = mgx \sin \alpha.$$

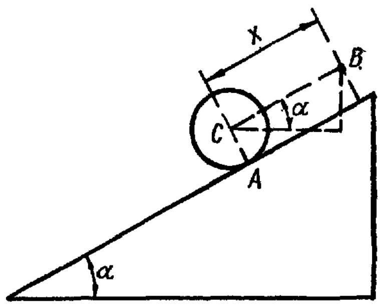

Рис. 4.13.

Диск одновременно участвует в двух движениях — поступательном со скоростью v и вращательном с угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. Следовательно, по формуле (4.20′) имеем

$$mgx \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где $J_C = mr^2/2$ — момент инерции диска относительно его оси, r — радиус диска.

Отсутствие скольжения при скатывании диска по наклонной плоскости означает, что скорость точки A касания диска с плоскостью равна скорости плоскости, т. е. нулю. В то же время скорость точки A численно равна разности скоростей этой точки в поступательном (v) и вращательном (ωr) движениях:

$$v_A = v - \omega r = 0$$

Следовательно, $\omega = v/r$. Заменив в формуле (а) J_C и ω их выражениями через m, r и v, получим

$$mgx \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4} mv^2$$

или

$$x = \frac{3}{4g \sin \alpha} v^2.$$

Дифференцируя это равенство по времени t и учитывая, что $\frac{dx}{dt} = v$ $\frac{dv}{dt} = a$ — искомое ускорение центра диска, получаем

$$v = \frac{3}{2g \sin \alpha} va$$

или

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$