Глава VI

ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ. ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

§ 6.1. Закон всемирного тяготения

1. Закономерности движения планет и их спутников, падения тел на Землю, движения артиллерийских снарядов, колебаний маятников свидетельствуют о существовании сил взаимного притяжения тел друг к другу. Эти силы подчиняются **закону всемирного тяготения** (гравитации), установленному И. Ньютоном в 1687 г.:

между всякими двумя материальными точками действует сила всемирного тяготения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек (m_1 и m_2) и обратно пропорциональная квадрату расстояния r между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (6.1)$$

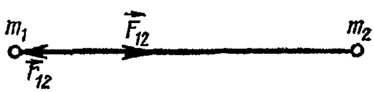

Рис. 6.1.

В векторной форме этот закон записывают следующим образом:

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \qquad (6.2)$$

где $\mathbf{F}_{12}$— сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй, $\mathbf{r}_{12}$— радиус-вектор, соединяющий вторую точку с первой, $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ — расстояние между точками, а знак минус указывает на то, что $\mathbf{F}_{12}$— сила притяжения, т. е. противоположна по направлению вектору $\mathbf{r}_{12}$ (рис. 6.1).

Коэффициент пропорциональности γ называют **гравитационной постоянной, или постоянной тяготения.** Как видно из уравнения (6.1), гравитационная постоянная численно равна силе взаимного тяготения двух материальных точек, массы которых одинаковы и равны единице массы, а расстояние между точками равно единице длины.

Размерность гравитационной постоянной в Международной системе единиц (СИ) найдем из уравнения (6.1):

$$[\gamma] = \frac{[F] \cdot [r]^2}{[m]^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

2. Для нахождения сил взаимного тяготения двух тел произвольных размеров и формы их необходимо мысленно разбить на столь большое число малых частей, чтобы каждую из них можно было считать материальной точкой. Если масса i-й точки первого тела m_i, а k-й точки второго тела m_k, то силу $\mathbf{F}_{ik}$ тяготения первой точки ко второй можно найти по формуле (6.2):

$$\mathbf{F}_{ik} = -\gamma \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik},$$

где $\mathbf{r}_{ik}$ — радиус-вектор, проведенный из k-й точки в i-ю.

Результирующая $\mathbf{F}_i$ сил притяжения i-й точки первого тела всеми n_2 материальными точками второго тела равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_{i1}, \ldots, \mathbf{F}_{in_2}$:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^{n_2} \mathbf{F}_{ik} = -\gamma m_i \sum_{k=1}^{n_2} \frac{m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}.$$

Сила $\mathbf{F}$ тяготения всего первого тела ко второму равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_i$, распространенной на все n_1 материальных точек первого тела:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{F}_i = -\gamma \sum_{i=1}^{n_1} m_i \sum_{k=1}^{n_2} \frac{m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}. \tag{6.3}$$

Можно показать, что формула (6.3) эквивалентна (6.2), где m_1 и m_2 — массы тел, а $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, соединяющий их центры масс, в следующих двух случаях:

а) оба тела имеют шарообразную форму, а их плотности зависят только от расстояний до центров этих тел;

б) размеры одного из тел во много раз меньше размеров другого, причем второе тело удовлетворяет условиям случая а).

В первом приближении можно считать, что Земля имеет шарообразную форму, а ее плотность зависит только от расстояния до центра Земли. Поэтому силу тяготения всякого тела к Земле можно определять по формулам (6.2) и (6.1).

3. Численное значение гравитационной постоянной было впервые экспериментально измерено Г. Кэвендишем в 1798 г. с помощью крутильных весов, принципиальная схема которых изображена на рис. 6.2. Легкое коромысло A с двумя одинаковыми маленькими шариками m было подвешено на упругой нити L. На другом коромысле B были укреплены на той же высоте два одинаковых массивных шара M. Поворачивая коромысло B вокруг вертикальной оси, можно было изменять расстояния между шарами m и M. Под действием пары сил, приложенных к шарам m со стороны шаров M, коромысло A поворачивалось в горизонтальной плоскости, закручивая нить L до тех пор, пока момент сил упругости не уравновешивал момент сил тяготения. Угол закручивания нити L определяли по смещению на шкале светового зайчика, отбрасываемого зеркальцем S, прикреплённым к середине коромысла A. Зная упругие свойства нити L и угол ее закручивания, Кэвендиш

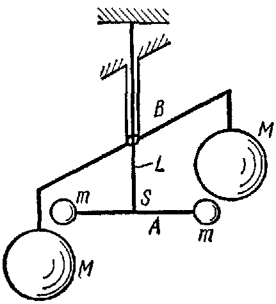

Рис. 6.2.

вычислял силы взаимного тяготения шаров m и M для различных расстояний между ними. Опыты Кэвендиша подтвердили справедливость закона всемирного тяготения и дали возможность определить значение гравитационной постоянной.

Более точные измерения гравитационной постоянной были произведены в 1898 г. Рихарцем. Идея этих опытов заключалась в следующем. Два одинаковых шара m были подвешены к разным концам коромысла рычажных весов B (рис. 6.3), установленных на массивной плоскопараллельной плите A. Один шар находился над плитой, а другой — под ней. Если шары находятся вдали от краев плиты, а расстояния r от шаров до плиты во много раз меньше ширины a и длины L плиты, то, как можно показать, силы тяготения шаров к плите не зависят от r и равны $\frac{2\pi\gamma mM}{S}$, где m и M — массы шара и плиты, а S — площадь поверхности плиты. На левый шар действовала сила, направленная вертикально вверх, а на правый — такая же по величине сила, направленная вертикально вниз. Поэтому равновесие весов нарушалось. По отклонению стрелки весов из положения равновесия можно было измерить силы, действовавшие на шары со стороны плиты.

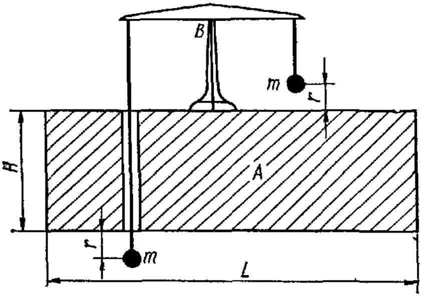

Рис. 6.3.

Из опытов получено следующее значение гравитационной постоянной:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{с}^2}.$$

4. Сила $\mathbf{F}$ тяготения к Земле каждого находящегося на ней тела направлена к центру Земли и численно равна

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}, \tag{6.4}$$

где m и M — массы тела и Земли, R — расстояние от тела до центра Земли.

Наблюдения показывают, что сила $\mathbf{F}$ вызывает два вида движения тела. Во-первых, тело, лишенное опоры, падает на Землю. Во-вторых, тело участвует в суточном вращении Земли, т. е. движется по окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения Земли. Поэтому силу тяготения $\mathbf{F}$ целесообразно разложить на две составляющие $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}_{\text{ц}}$ (рис. 6.4):

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_{\text{ц}}. \tag{6.5}$$

Центростремительная сила $\mathbf{F}_ц$ обусловливает участие тела в суточном вращении Земли. Она направлена к центру O' окружности радиусом R_φ, по которой движется тело, и численно равна

$$F_ц = \frac{mv^2}{R_\varphi} = m\omega^2 R_\varphi ,$$

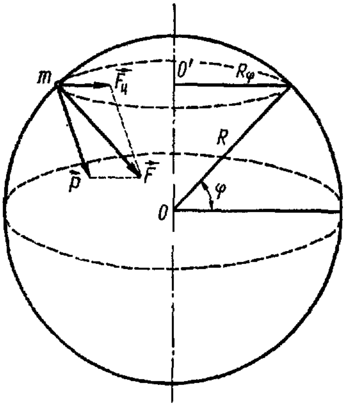

Рис. 6.4.

где $v = \omega R_\varphi$ — линейная скорость тела, ω — угловая скорость суточного вращения Земли. Как видно из рис. 6.4, $R_\varphi = R \cdot \cos\varphi$, где R — расстояние от тела до центра Земли, φ — географическая широта места нахождения тела. Таким образом,

$$F_ц = m\omega^2 R \cdot \cos\varphi . \qquad (6.6)$$

Сила **P** вызывает падение незакрепленного тела на Землю. Ее называют **силой тяжести тела.** Она равна силе, с которой неподвижное относительно Земли тело давит на опору вследствие тяготения к Земле, и может быть измерена с помощью пружинного динамометра. Точку приложения силы тяжести тела, т. е. равнодействующей сил тяжести всех частиц тела, называют **центром тяжести тела.**

Из уравнения (6.6) видно, что численное значение центростремительной силы зависит от географической широты φ того места, где находится тело. На полюсах $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ $F_ц = 0$, а на экваторе $(\varphi = 0)$ она достигает максимального значения, равного $m\omega^2 R$. Следовательно, во всех точках земной поверхности, за исключением полюсов, сила тяжести тела меньше силы его тяготения к Земле. Кроме того, везде, кроме полюсов и экватора, вектор **P** не перпендикулярен к поверхности Земли. Вследствие суточного вращения Земли сила тяжести тела максимальна на полюсах, где она равна силе тяготения, и минимальна на экваторе:

$$P_{пол} = \gamma \frac{mM}{R_{пол}^2} \quad и \quad P_{экв} = \gamma \frac{mM}{R_{экв}^2} - m\omega^2 R_{экв},$$

$$P_{экв} = \gamma \frac{mM}{R_{экв}^2} \left(1 - \frac{\omega^2 R_{экв}^3}{\gamma M}\right)$$

где $R_{пол} = 6357$ км и $R_{экв} = 6378$ км — полярный и экваториальный радиусы Земли. Небольшое различие величин $R_{пол}$ и $R_{экв}$ связано с тем, что Земля не имеет строго сферической формы, а весьма близка к эллипсоиду вращения. Так как масса Земли

$$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{кг}\ \text{и}\ \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\ \text{рад/с, то}$$

$$\frac{\omega^2 R^3_{\text{экв}}}{\gamma M} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot (6{,}38 \cdot 10^6)^2}{(24 \cdot 3600)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}} = 0{,}00345.$$

Поэтому в большинстве практических задач можно пренебречь отличием силы тяжести тела от силы тяготения его к Земле, полагая

$$P = \gamma \frac{mM}{R^2}. \tag{6.7}$$

5. Движение тела под действием одной только силы тяжести P называют **свободным падением**, а ускорение g, приобретаемое при этом телом, называют **ускорением свободно падающего тела.** По второму закону Ньютона

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{P}}{m}. \tag{6.8}$$

Воспользовавшись уравнением (6.7), т. е. пренебрегая влиянием суточного вращения Земли, найдем

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} = \gamma \frac{M}{(R_0 + h)^2}, \tag{6.9}$$

где R_0— радиус поверхности Земли, h — расстояние от центра тяжести тела до поверхности Земли.

Из (6.9) следует, что:

а) ускорение свободно падающего тела не зависит от массы, размеров и других характеристик тела, поэтому все тела свободно падают в безвоздушном пространстве с одинаковыми ускорениями;

б) при удалении от поверхности Земли ускорение свободно падающего тела изменяется по закону

$$\frac{g_0}{g} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0 + h}{R_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2, \tag{6.10}$$

где g и g_0— ускорения тела при его свободном падении соответственно на высоте h и у поверхности Земли.

Вблизи поверхности Земли $h \ll R_0$ и

$$\frac{g_0}{g} \approx 1 + \frac{2h}{R_0},$$

т. е. с подъемом на 1 км ускорение силы тяжести уменьшается приблизительно на 0,03%.

Нешарообразность формы Земли и влияние суточного вращения приводят к тому, что ускорение силы тяжести g_0 оказывается зависящим от географической широты места, изменяясь от 9,83 м/с^2 на полюсах до 9,78 м/с^2 на экваторе. На широте 45° оно равно 9,80665 м/с^2 и называется «нормальным ускорением».

6. Ньютон подтвердил правильность закона всемирного тяготения, доказав, что сила, удерживающая Луну на ее орбите, есть сила тяготения Луны к Земле. Если считать, что Луна равномерно движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом R, то центростремительное ускорение Луны равно

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

где T — период обращения Луны. Из астрономии было известно, что $T = 27{,}3$ сут, а R больше радиуса Земли R_0 в 60,3 раза, поэтому $a = 2{,}70 \cdot 10^{-3}$ м/с². Ускорение g на расстоянии R от центра Земли, как видно из формулы (6.10), равно

$$g = g_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{9{,}81}{(60{,}3)^2} = 2{,}70 \cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2,$$

т. е. совпадает с a.

Таким образом, центростремительная сила, действующая на Луну, действительно равна силе тяготения Луны к Земле:

$$F_{ц} = m_{л} a = m_{л} g = \gamma \frac{m_{л} M}{R^2},$$

где $m_{л}$ — масса Луны.

С помощью закона всемирного тяготения и законов динамики Ньютон обосновал законы движения небесных тел. Он определил отношение массы Солнца к массе каждой из планет, у которых были известны спутники; дал метод вычисления орбит комет, объяснил явление приливов и отливов и т. д.

Труды Ньютона послужили основой дальнейших открытий в небесной механике. Так, изучение возмущений в движении Урана привело к открытию новой планеты — Нептуна, а исследование возмущений в движении Нептуна — к открытию Плутона.

§ 6.2. Поле тяготения

1. Закон всемирного тяготения, устанавливая зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, не дает ответа на вопрос о том, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение, в отличие от таких механических взаимодействий, как удар и трение, принадлежит к особой группе взаимодействий. Оно проявляется между телами, удаленными друг от друга, причем силы тяготения не зависят от того, в какой среде эти тела находятся (в воздухе, воде или в каком-либо другом веществе). Тяготение в равной мере существует даже тогда, когда взаимодействующие тела находятся в вакууме.

2. Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством **поля тяготения (гравитационного поля)**. Это поле порождается телами и так же, как вещество и другие физические поля (например, электромагнитное), с которыми мы познакомимся в после-