6. Ньютон подтвердил правильность закона всемирного тяготения, доказав, что сила, удерживающая Луну на ее орбите, есть сила тяготения Луны к Земле. Если считать, что Луна равномерно движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом R, то центростремительное ускорение Луны равно

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

где T — период обращения Луны. Из астрономии было известно, что $T = 27{,}3$ сут, а R больше радиуса Земли R_0 в 60,3 раза, поэтому $a = 2{,}70 \cdot 10^{-3}$ м/с². Ускорение g на расстоянии R от центра Земли, как видно из формулы (6.10), равно

$$g = g_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{9{,}81}{(60{,}3)^2} = 2{,}70 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2,$$

т. е. совпадает с a.

Таким образом, центростремительная сила, действующая на Луну, действительно равна силе тяготения Луны к Земле:

$$F_ц = m_л a = m_л g = \gamma \frac{m_л M}{R^2},$$

где $m_л$ — масса Луны.

С помощью закона всемирного тяготения и законов динамики Ньютон обосновал законы движения небесных тел. Он определил отношение массы Солнца к массе каждой из планет, у которых были известны спутники; дал метод вычисления орбит комет, объяснил явление приливов и отливов и т. д.

Труды Ньютона послужили основой дальнейших открытий в небесной механике. Так, изучение возмущений в движении Урана привело к открытию новой планеты — Нептуна, а исследование возмущений в движении Нептуна — к открытию Плутона.

§ 6.2. Поле тяготения

1. Закон всемирного тяготения, устанавливая зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, не дает ответа на вопрос о том, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение, в отличие от таких механических взаимодействий, как удар и трение, принадлежит к особой группе взаимодействий. Оно проявляется между телами, удаленными друг от друга, причем силы тяготения не зависят от того, в какой среде эти тела находятся (в воздухе, воде или в каком-либо другом веществе). Тяготение в равной мере существует даже тогда, когда взаимодействующие тела находятся в вакууме.

2. Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством **поля тяготения (гравитационного поля)**. Это поле порождается телами и так же, как вещество и другие физические поля (например, электромагнитное), с которыми мы познакомимся в после-

дующих частях курса, является одной из форм материи. Основное свойство поля тяготения, отличающее его от других физических полей, состоит в том, что на всякую материальную точку с массой m, внесенную в это поле, действует сила тяготения $\mathbf{F}$, пропорциональная m:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G}. \tag{6.11}$$

Вектор $\mathbf{G}$, входящий в эту формулу, не зависит от m. Его называют **напряженностью** поля тяготения. Он численно равен силе, действующей со стороны поля на материальную точку *единичной массы*, и совпадает с этой силой по направлению. Вектор напряженности является *силовой характеристикой* гравитационного поля и в общем случае изменяется при переходе от одной точки поля к другой.

Если материальная точка движется только под действием сил поля тяготения, то, как видно из сопоставления (6.11) со вторым законом Ньютона, ее ускорение в каждой точке поля совпадает с вектором $\mathbf{G}$.

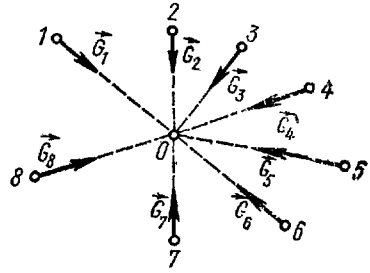

Рис. 6.5.

Поле называют **однородным**, если его напряженность во всех точках одинакова. Поле называют **центральным**, если во всех его точках векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точке O, *неподвижной* по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (рис. 6.5). Если начало координат совместить с точкой O, а положение точек поля C (x, y, z) определять с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из O, то для центрального поля тяготения

$$\mathbf{G} = \frac{G_r}{r} \cdot \mathbf{r}, \tag{6.12}$$

где $G_r = G_r\,(x, y, z)$ — проекция вектора $\mathbf{G}$ на направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$, а $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Точку O называют **центром сил.**

Центральное поле называют **сферически симметричным**, если численное значение вектора напряженности зависит только от расстояния r до центра сил O:

$$G = G(r) \text{ и } G_r = G_r\,(r).$$

Пример. Поле тяготения, создаваемое неподвижной материальной точкой с массой M. По закону всемирного тяготения (6.2) сила $\mathbf{F}$, действующая на материальную точку с массой m со стороны поля тяготения точки с массой M, равна

$$\mathbf{F} = -\gamma\,\frac{mM}{r^3}\,\mathbf{r}.$$

Напряженность поля

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r}. \tag{6.13}$$

Поле является центральным и сферически симметричным, так как

$$G_r = -\gamma \frac{M}{r^2}. \tag{6.14}$$

3. Рассмотрим поле тяготения, создаваемое системой неподвижных материальных точек с массами m_1, m_2, ..., m_n.

Сила $\mathbf{F}_i$, которая действует со стороны i-й точки системы на материальную точку с массой m, помещенную в произвольную точку C поля, равна

$$\mathbf{F}_i = -\gamma \frac{mm_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = m\mathbf{G}_i, \tag{6.15}$$

где $\mathbf{r}_i$— радиус-вектор, проведенный из i-й точки системы в точку C, $\mathbf{G}_i$— напряженность в точке C поля тяготения, создаваемого одной материальной точкой с массой m_i.

Результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая на точку m со стороны всех точек системы, равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G},$$

где $\mathbf{G}$ — искомая напряженность поля системы материальных точек. Из двух последних формул следует, что

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i. \tag{6.16}$$

Таким образом, *при наложении нескольких полей тяготения напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей всех этих полей.*

Это утверждение называют **принципом суперпозиции** (наложения) **полей.** На основе принципа суперпозиции можно доказать, что для напряженности поля тяготения вне шарообразного тела, плотность которого всюду одинакова или изменяется только в радиальных направлениях ($\rho = \rho(r)$), справедлива формула (6.13):

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{при } r \geqslant R),$$

где M — масса всего тела, R — радиус его поверхности, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра тела.

Иными словами, поле такого тела подобно полю материальной точки, расположенной в центре тела и обладающей массой, равной массе тела.

Если поле тяготения создается шаровым слоем, плотность которого $\rho = \rho(r)$, то напряженность этого поля внутри полости, ограниченной слоем, равна нулю.

4. В соответствии со вторым законом Ньютона и выражением (6.11) для силы тяготения **F** ускорение **a**, приобретаемое в поле тяготения телом, которое свободно от других воздействий, равно напряженности **G** поля тяготения в месте нахождения тела в рассматриваемый момент времени:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{G}.$$

Если тело несвободно (например, находится на поверхности Земли, лежит на полу или подвешено к потолку кабины лифта и т. п.). то под влиянием поля тяготения тело действует с некоторой силой **Q** на опору или подвес, удерживающие его от свободного движения в поле тяготения. Эту силу называют **весом тела**. В свою очередь опора или подвес действуют на тело с силой реакции, равной $-\mathbf{Q}$. В отличие от силы тяготения, вес тела зависит от величины ускорения $\mathbf{a}_0$, с которым движутся опора или подвес и неподвижное относительно них тело. В самом деле, по второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{Q},$$

откуда вес тела

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 = m(\mathbf{G} - \mathbf{a}_0),$$

где m — масса тела. Например, для тела, неподвижно лежащего на поверхности Земли, $\mathbf{a}_0$— центростремительное ускорение, обусловленное суточным вращением Земли. Поэтому вес тела, покоящегося относительно Земли, равен его силе тяжести. Вес тела, подвешенного в лифте, больше силы тяжести этого тела, если ускорение лифта направлено вверх, т. е. в сторону, противоположную направлению вектора **G** напряженности поля тяготения Земли (лифт опускается замедленно или поднимается ускоренно). Если ускорение лифта совпадает по направлению с вектором **G**, т. е. лифт опускается ускоренно или поднимается замедленно, то вес тела меньше его силы тяжести. В частности, при свободном падении лифта вес тела равен нулю. Такое состояние называют **состоянием невесомости**. Оно реализуется в любой системе, движущейся только под действием поля тяготения, которое в пределах системы можно считать однородным. Состояние невесомости характерно для тел, находящихся в космическом корабле, так как основную часть своей траектории в поле тяготения корабль проходит с выключенным двигателем.

5. Докажем, что силы тяготения — консервативные силы. Элементарная работа δA, совершаемая силами поля тяготения при перемещении в нем материальной точки с массой m, равна

$$\delta A = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = m(\mathbf{G}, d\mathbf{r}), \qquad (6.17)$$

где $\mathbf{G}$ — напряженность поля, $d\mathbf{r}$ — вектор элементарного перемещения.

В простейшем случае поля, создаваемого материальной точкой с массой M (рис. 6.6),

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r}$$

и

$$\delta A = -\gamma \frac{mM}{r^3} (\mathbf{r}, d\mathbf{r}).$$

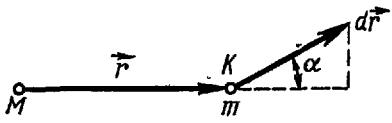

Рис. 6.6.

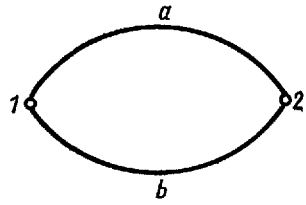

Рис. 6.7.

Так как

$$(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2} d(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr,$$

то

$$\delta A = -\gamma m M \frac{dr}{r^2} \tag{6.18}$$

При конечном перемещении точки m из точки *1* в точку *2* (рис. 6.7) работа сил поля равна

$$A_{1-2} = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma m M \frac{dr}{r^2} = -\gamma m M \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{6.19}$$

Из выражения (6.19) следует, что работа A_{1-2} не зависит от того, вдоль какой траектории точка m перемещалась из положения *1* в положение *2*. Она одинакова при перемещении точки вдоль произвольных кривых *1a2* и *1b2*. Работа A_{1-2} пропорциональна произведению масс m и M материальных точек и зависит только от начального и конечного расстояний между ними. Таким образом, силы поля тяготения, создаваемого одной материальной точкой M, действительно являются консервативными. Работа этих сил при перемещении точки m вдоль произвольного замкнутого контура L (например, контура *1a2b1*) тождественно равна нулю:

$$\oint_l (\mathbf{F}\ d\mathbf{r}) \equiv 0, \tag{6.20}$$

или, учитывая, что $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$,

$$\oint_L (\mathbf{G}, d\mathbf{r}) \equiv 0. \qquad (6.20')$$

Интегралы $\oint_L (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$ и $\oint_L (\mathbf{G}, d\mathbf{r})$ называют **циркуляцией**, соответственно, **вектора F и вектора G вдоль замкнутого контура.** Условие (6.20) или эквивалентное ему условие (6.20′) является необходимым и достаточным признаком консервативности силового поля **F**.

Легко показать, что тождество (6.20′) справедливо для любого поля тяготения, создаваемого сколь угодно сложной совокупностью тел.

В самом деле, любую совокупность тел можно заменить эквивалентной им системой n материальных точек. Поэтому напряженность **G** произвольного поля тяготения в соответствии с принципом суперпозиции полей равна

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i,$$

где $\mathbf{G}_i$ — напряженность поля, создаваемого i-й материальной точкой системы. Следовательно, скалярное произведение:

$$(\mathbf{G}_i\ d\mathbf{r}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i,\ d\mathbf{r}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{G}_i,\ d\mathbf{r})$$

и

$$\oint_L (\mathbf{G},\ d\mathbf{r}) = \oint_L \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{G}_i,\ d\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \oint_L (\mathbf{G}_i,\ d\mathbf{r}) \equiv 0,$$

так как по доказанному выше циркуляция вдоль замкнутого контура L вектора $\mathbf{G}_i$ напряженности поля тяготения, создаваемого одной i-й материальной точкой, тождественно равна нулю.

6. В § 3.1 показано, что работа A, совершаемая консервативными силами, равна уменьшению потенциальной энергии системы. В рассматриваемом нами случае она равна уменьшению потенциальной энергии $W_п$ материальной точки m, перемещающейся в поле тяготения:

$$A_{1-2} = -\Delta W_п = W_{п_1} - W_{п_2} \qquad (6.21)$$

или, для элементарного перемещения [1],

$$dA = -dW_п. \qquad (6.21')$$

Из (6.21) и (6.19) следует, что в случае поля тяготения, создаваемого материальной точкой с массой M,

$$W_{п_1} - W_{п_2} = -\gamma m M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

[1] Элементарная работа консервативных сил является полным дифференциалом. Поэтому в дальнейшем мы ее обозначим через dA

Если, как это обычно принято, условиться считать, что потенциальная энергия точки m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от источника поля — точки M:

$$\lim_{r_2 \to \infty} W_{п_2} = 0,$$

то

$$W_{п_1} = -\frac{\gamma m M}{r_1},$$

или, в силу произвольности выбора точки *1*,

$$W_п = -\frac{\gamma m M}{r}. \qquad (6.22)$$

Формула (6.22) в равной мере справедлива для потенциальной энергии материальной точки с массой M в поле тяготения, создаваемом материальной точкой с массой m. Поэтому $W_п$ часто называют **взаимной потенциальной энергией** обеих точек.

Все величины, входящие в правую часть уравнения (6.22), положительны. Следовательно, потенциальная энергия $W_п < 0$

Можно показать, что потенциальная энергия материальной точки с массой m в поле тяготения, создаваемом произвольной системой материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, равна

$$W_п = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m m_i}{r_i}, \qquad (6.23)$$

где r_i — расстояние от точки с массой m до i-й точки системы.

Если поле создается телом шарообразной формы, плотность которого зависит только от расстояний до его центра, то формула (6.23) оказывается эквивалентной формуле (6.22), где M — масса всего тела, а $r \geqslant R$ (R — радиус поверхности тела).

7. Величина $\varphi_т$, равная отношению потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения к массе m этой точки, как видно из (6.23), не зависит от m:

$$\varphi_т = \frac{W_п}{m} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{r_i}. \qquad (6.24)$$

Иными словами, $\varphi_т$ служит энергетической характеристикой самого поля тяготения. Ее называют **потенциалом поля тяготения.** Размерность $\varphi_т$ совпадает с размерностью квадрата скорости.

Из формулы (6.22) следует, что потенциал поля тяготения, создаваемого одной материальной точкой с массой M, равен

$$\varphi_т = -\frac{\gamma M}{r}, \qquad (6.25)$$

где r — расстояние от этой точки до рассматриваемой точки поля.

Эта же формула справедлива для поля тяготения тел шарообразной формы, удовлетворяющих указанным выше условиям.

Из сопоставления формул (6.24) и (6.25) следует, что

$$\varphi_{\text{т}} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\text{т}_i}, \tag{6.26}$$

т. е. потенциал в некоторой точке поля, являющегося результатом наложения ряда полей, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности.

8. Между двумя характеристиками поля тяготения, его напряженностью и потенциалом, существует взаимосвязь. Элементарная работа dA, совершаемая силами поля при малом перемещении материальной точки с массой m, как видно из уравнений (6.21) и (6.24), равна

$$dA = -m \cdot d\varphi_{\text{т}}.$$

С другой стороны, в соответствии с (6.17)[1]

$$dA = m(\mathbf{G},\ d\mathbf{r}) = mG\cos\alpha \cdot dl = m \cdot G_l dl,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{G}$ и $d\mathbf{r}$, $dl = |d\mathbf{r}|$ и $G_l = G\cos\alpha$ — проекция вектора $\mathbf{G}$ на направление элементарного перемещения $d\mathbf{r}$.

Таким образом,

$$mG_l \cdot dl = -m \cdot d\varphi_{\text{т}},$$

или

$$G_l = -\frac{d\varphi_{\text{т}}}{dl}. \tag{6.27}$$

Величина $\frac{d\varphi_{\text{т}}}{dl}$ характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения $d\mathbf{r}$ в поле тяготения. Если вектор $d\mathbf{r}$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{G}$, то $G_l = G$ и $\left|\frac{d\varphi_{\text{т}}}{dl}\right|$, как видно из (6.27), имеет максимальное значение, причем в силу положительности G величина $\frac{d\varphi_{\text{т}}}{dl} < 0$. Таким образом, *в каждой точке поля тяготения вектор напряженности* $\mathbf{G}$ *направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.*

Можно показать, что

$$\mathbf{G} = -\operatorname{grad}\varphi_{\text{т}}, \tag{6.28}$$

где $\operatorname{grad}\varphi_{\text{т}} = \frac{\partial\varphi_{\text{т}}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi_{\text{т}}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi_{\text{т}}}{\partial z}\mathbf{k}$ — вектор, называемый **градиентом потенциала**, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — орты прямоугольной декартовой системы координат.

9. Рассмотренная нами теория поля тяготения так же, как и лежащий в ее основе закон всемирного тяготения Ньютона, является при-

[1] См сноску на стр 111

ближенной. Она достаточно точно описывает движение тела в поле тяготения при соблюдении следующих двух условий:

а) скорость v тела во много раз меньше скорости света в вакууме ($v \ll c$);

б) поле тяготения сравнительно слабое, т. е. его потенциал $|\varphi_т| \ll c^2$.

Более точная теория поля тяготения, основанная на теории относительности, была разработана А. Эйнштейном (1916). Теория относительности, которая будет рассмотрена в III томе курса, указала на существование тесной взаимосвязи между пространством и временем. В связи с этим для описания физических процессов оказалось необходимым использование четырехмерного пространства-времени. Согласно современным воззрениям геометрические свойства (метрика) пространства-времени зависят от распределения в пространстве тяготеющих масс и их движения. Поле тяготения вызывает отклонение метрики пространства-времени от метрики, описываемой геометрией Евклида: массы, создающие поле тяготения, «искривляют» реальное трехмерное пространство и по-разному изменяют ход времени в различных точках этого пространства. В свою очередь движение тел в поле тяготения можно рассматривать как движение по инерции в пространстве, метрика которого неэвклидова, так что это движение тел не является равномерным и прямолинейным.

Теория тяготения позволила предсказать и объяснить ряд явлений, подтвержденных астрономическими измерениями: медленное вращение эллиптических орбит планет вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям этих орбит; искривление световых лучей в поле тяготения и др.

Оказалось также, что в общем случае произвольных полей тяготения принцип суперпозиции не выполняется. Этот принцип соблюдается лишь для слабых полей ($|\varphi_т| \ll c^2$) и движений с малыми скоростями ($v \ll c$).

§ 6.3. Движение в центральном силовом поле

1. Рассмотрим движение материальной точки B под действием центральной силы

$$\mathbf{F} = \frac{F_r}{r}\mathbf{r}, \tag{6.29}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра сил O в движущуюся точку, F_r — проекция вектора силы на направление радиуса-вектора, зависящая только от расстояния r между точками O и B. В случае притяжения точки B к центру сил $F_r = -|\mathbf{F}|$, в случае отталкивания $F_r = |\mathbf{F}|$.

2. Момент $\mathbf{M}$ силы $\mathbf{F}$ относительно точки O равен нулю:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \frac{F_r}{r}[\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0.$$