

ближенной. Она достаточно точно описывает движение тела в поле тяготения при соблюдении следующих двух условий:

а) скорость v тела во много раз меньше скорости света в вакууме ($v \ll c$);

б) поле тяготения сравнительно слабое, т. е. его потенциал $|\varphi_T| \ll c^2$.

Более точная теория поля тяготения, основанная на теории относительности, была разработана А. Эйнштейном (1916). Теория относительности, которая будет рассмотрена в III томе курса, указала на существование тесной взаимосвязи между пространством и временем. В связи с этим для описания физических процессов оказалось необходимым использование четырехмерного пространства-времени. Согласно современным воззрениям геометрические свойства (метрика) пространства-времени зависят от распределения в пространстве тяготеющих масс и их движения. Поле тяготения вызывает отклонение метрики пространства-времени от метрики, описываемой геометрией Евклида: массы, создающие поле тяготения, «искривляют» реальное трехмерное пространство и по-разному изменяют ход времени в различных точках этого пространства. В свою очередь движение тел в поле тяготения можно рассматривать как движение по инерции в пространстве, метрика которого неевклидова, так что это движение тел не является равномерным и прямолинейным.

Теория тяготения позволила предсказать и объяснить ряд явлений, подтвержденных астрономическими измерениями: медленное вращение эллиптических орбит планет вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям этих орбит; искривление световых лучей в поле тяготения и др.

Оказалось также, что в общем случае произвольных полей тяготения принцип суперпозиции не выполняется. Этот принцип соблюдается лишь для слабых полей ($|\varphi_T| \ll c^2$) и движений с малыми скоростями ($v \ll c$).

§ 6.3. Движение в центральном силовом поле

1. Рассмотрим движение материальной точки B под действием центральной силы

$$\mathbf{F} = \frac{F_r}{r} \mathbf{r}, \quad (6.29)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра сил O в движущуюся точку, F_r — проекция вектора силы на направление радиуса-вектора, зависящая только от расстояния r между точками O и B . В случае притяжения точки B к центру сил $F_r = -|\mathbf{F}|$, в случае отталкивания $F_r = |\mathbf{F}|$.

2. Момент \mathbf{M} силы \mathbf{F} относительно точки O равен нулю:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \frac{F_r}{r} [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0.$$

Поэтому в соответствии с законом сохранения момент импульса материальной точки B относительно точки O

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \text{const}, \quad (6.30)$$

где m — масса точки B , а $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — ее скорость.

Вектор \mathbf{L} перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} . Из (6.30) следует, что в центральном силовом поле эта плоскость не меняет своей ориентации в пространстве, т. е. траектория точки B является плоской кривой. Таким образом, положение точки B можно задать с помощью двух полярных координат r и φ (рис. 6.8), а ее скорость \mathbf{v} можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие — радиальную скорость v_r и трансверсальную скорость v_φ :

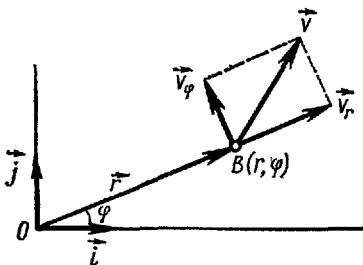


Рис. 6.8.

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2},$$

где

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{и} \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

Действительно, $\mathbf{r} = r(\cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j})$, где \mathbf{i} — единичный вектор полярной оси, а \mathbf{j} — единичный вектор, образующий с \mathbf{i} угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Скорость

точки B $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, или

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} (\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi) + r \frac{d\varphi}{dt} (-\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi).$$

Единичный вектор $\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi = \frac{\mathbf{r}}{r}$ совпадает по направлению с вектором \mathbf{r} , а единичный вектор $-\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi$ перпендикулярен к \mathbf{r} . Поэтому первый член правой части написанного выше выражения для \mathbf{v} является радиальной скоростью, а второй — трансверсальной.

Из (6.30) и (6.31) следует, что

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}_r] + [\mathbf{r}, m\mathbf{v}_\varphi] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}_\varphi],$$

или, в силу взаимной перпендикулярности векторов \mathbf{r} и \mathbf{v}_φ ,

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}. \quad (6.32)$$

При повороте радиуса-вектора \mathbf{r} за время dt на малый угол $d\varphi$ радиус-вектор очерчивает круговой сектор, площадь которого $dS = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi$.

Поэтому величину

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

называют **секториальной**, или **секторной**, **скоростью**. Из (6.32) видно, что при движении материальной точки в центральном силовом поле секториальная скорость точки постоянна:

$$\sigma = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad (6.33)$$

Этот закон впервые был установлен Кеплером применительно к движению планет в поле тяготения Солнца. Его называют **вторым законом Кеплера**.

3. Для определения траектории материальной точки B воспользуемся законами сохранения момента импульса (уравнение 6.32) и энергии:

$$W = W_k + W_n = \text{const.} \quad (6.34)$$

На основе соотношений (6.31) и (6.32) кинетическая энергия может быть представлена в виде:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \right].$$

Подставив это значение W_k в уравнение (6.34) и разрешив его относительно $\frac{dr}{dt}$, получим:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (W - W_n) - \left(\frac{L}{r} \right)^2}.$$

Из (6.32)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}.$$

Таким образом,

$$d\varphi = \frac{L/r^2}{\sqrt{\frac{2}{m} (W - W_n) - \left(\frac{L}{r} \right)^2}} dr$$

и

$$\varphi = - \int \frac{d\left(\frac{L}{r} \right)}{\sqrt{\frac{2}{m} (W - W_n) - \left(\frac{L}{r} \right)^2}}. \quad (6.35)$$

Для нахождения этого интеграла необходимо знать зависимость потенциальной энергии W_n от r . Большой практический интерес представляет движение материальной точки B в таком сферическом

симметричном центральном силовом поле, для которого

$$W_{\Pi} = \frac{\beta}{r}, \quad (6.36)$$

где $\beta = \text{const}$. В случае поля тяготения, создаваемого материальной точкой с массой M , $\beta = -\gamma mM < 0$ (см. формулу 6.22). Соотношение (6.36) справедливо также для потенциальной энергии точечного электрического заряда q_1 , находящегося в электростатическом поле другого точечного заряда q_2 . Во II томе курса физики будет показано, что β пропорционально произведению $q_1 q_2$, причем $\beta < 0$, если заряды взаимно притягиваются (разноименные заряды), и $\beta > 0$, если заряды взаимно отталкиваются (одноименные заряды).

Подставим значение (6.36) для W_{Π} в уравнение (6.35)

$$\begin{aligned} \varphi &= - \int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2mW - 2\frac{m\beta}{r} - \left(\frac{L}{r}\right)^2}} = \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}\right)}{\sqrt{\left[2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2\right] - \left[\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}\right]^2}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл сводится к табличному, если ввести обозначения:

$$\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L} = x \quad \text{и} \quad 2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2 = a^2,$$

$$\varphi = - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \frac{x}{a} + \varphi_0,$$

где φ_0 — постоянная интегрирования, которую можно обратить в нуль, выбрав начало отсчета угла φ таким образом, чтобы $\varphi = 0$ при $x = a$. Подставив значения x и a , получим уравнение траектории точки B :

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}}{\sqrt{2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}}$$

или

$$r = \frac{L}{-\frac{m\beta}{L} + \cos \varphi \sqrt{2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}}. \quad (6.37)$$

4. Если точка B притягивается к силовому центру, то $\beta < 0$ и уравнение ее траектории (6.37) можно переписать в такой

форме:

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}, \quad (6.38)$$

где

$$p = \frac{L^2}{m|\beta|} \quad \text{и} \quad e = \sqrt{\frac{2WL^2}{m\beta^2} + 1}. \quad (6.39)$$

Траектория, или орбита, точки B представляет собой кривую второго порядка, причем p — ее фокальный параметр, а e — эксцентриситет.

Возможны следующие типы траекторий точки B :

- а) эллиптическая орбита ($e < 1$) при $W < 0$;
- б) параболическая орбита ($e = 1$) при $W = 0$;
- в) гиперболическая орбита ($e > 1$) при $W > 0$;
- г) прямолинейная траектория, проходящая через центр сил ($p = 0, e = 1$) при $L = 0$.

В первых трех случаях центр сил совпадает с одним из фокусов орбиты. Для планет, движущихся в поле тяготения Солнца, $W < 0$. Поэтому для них справедлив **первый закон Кеплера**:

все планеты Солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

В соответствии со вторым законом Кеплера секториальная скорость σ каждой из планет постоянна. Следовательно, период T обращения планеты по орбите равен отношению площади S , ограниченной орбитой, к σ :

$$T = \frac{S}{\sigma}.$$

Площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — его большая и малая полуоси. Учитывая, что

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad \text{и} \quad p = a(1 - e^2),$$

а также используя соотношение (6.33), получаем

$$T^2 = \frac{\pi^2 p}{L^2/4m^2} a^3.$$

Так как по формуле (6.39) $p = L^2/m|\beta|$, где $|\beta| = \gamma tM$ (M — масса Солнца), то

$$T^2 = \frac{4\pi^3}{\gamma M} a^3. \quad (6.40)$$

Уравнение (6.40) является математической записью **третьего закона Кеплера**:

квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца прямо пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

5. В случае движения материальной точки B в сферически симметричном центральном поле сил отталкивания ($\beta > 0$) урав-

нение ее траектории (6.37) также представляет собой уравнение кривой второго порядка:

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \varphi}, \quad (6.41)$$

где p и e определяются по формулам (6.39).

Полная энергия материальной точки B :

$$W = W_k + W_n > 0,$$

так как $W_n > 0$, а кинетическая энергия всегда положительна. Поэтому точка B может двигаться только либо по гиперболической орбите, либо вдоль прямой, проходящей через центр сил (при $L = 0$).

§ 6.4. Проблема космических полетов. Космические скорости

1. Запуск в Советском Союзе 4 октября 1957 г. первого в истории человечества искусственного спутника Земли положил начало освоению человеком космического пространства и явился выдающимся достижением советской науки и техники. В последующие годы изучение и освоение космоса развивалось невиданно быстрыми темпами. Перечислим лишь некоторые наиболее важные достижения в этой области. 12 апреля 1961 г. Ю. А. Гагарин совершил первый в истории космический полет на пилотируемом космическом корабле «Восток», а в 1965 г. А. А. Леонов впервые осуществил выход из космического корабля в открытое космическое пространство. В 1966 г. советские автоматические межпланетные станции (АМС) «Луна-9» и «Луна-13» впервые осуществили мягкую посадку на поверхность Луны, а АМС «Луна-10» впервые вывела на окололунную орбиту искусственный спутник Луны. В 1968 г. советский космический аппарат «Зонд-5» впервые совершил облет Луны с последующим возвращением и мягкой посадкой на Землю. В конце того же года облет Луны и возвращение на Землю было осуществлено американским лунным космическим кораблем (ЛКК) «Аполлон-8» с тремя космонавтами на борту. В июле 1969 г. с помощью ЛКК «Аполлон-11» впервые была осуществлена высадка на поверхность Луны двух американских космонавтов — Н. Армстронга и Э. Олдрина, взявших и доставивших на Землю первые пробы лунного грунта. В сентябре 1970 г. советская АМС «Луна-16», совершив мягкую посадку на Луну и взяв с помощью автоматической буровой установки пробы лунного грунта, возвратилась на Землю. В ноябре 1970 г. АМС «Луна-17» доставила на Луну первый автоматический лунный самоходный аппарат «Луноход-1», который управлялся с Земли и был оборудован научной аппаратурой, приборами и системами управления, радиосвязи и телевизионного наблюдения. Весьма ценные сведения о составе, температуре и давлении атмосферы планеты Венера были получены с помощью советских АМС «Венера-4» (1967 г.), «Венера-5», «Венера-6» (1969 г.) и «Венера-7» (1970 г.). Аналогичные исследования атмосферы и фотографирование поверхности