Вопросы для повторения

1. Как вычислить силу всемирного тяготения между двумя телами, имеющими произвольные размеры и форму?
2. Что такое сила тяжести тела и от чего она зависит?
3. Что такое поле тяготения? Какие величины вводятся для характеристики этого поля и как они связаны между собой?
4. Как доказать консервативность снл тяготения?
5. Какие силы называют центральными? Приведите примеры центральных сил.
6. Выведите законы Кеплера.
7. Что называют первой и второй космическими скоростями? Найдите их значения.
8. Почему для запуска искусственных спутников Земли и космических кораблей применяют миогоступенчатые ракеты?
9. Что называют прицельным расстоянием и углом рассеяния? Какую форму имеют траекторин частиц, рассеиваемых неподвижным центром?

Примеры решения задач

Задача 6.1. Пользуясь понятием потенциала поля тяготения найдите численные значения второй космической скорости для Земли ($M_{\rm I}$ = $= 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг; $R_{\rm I} = 6{,}37 \cdot 10^6$ м), Луны ($M_{\rm II} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг; $R_{\rm II} = 1{,}74 \times$ $\times 10^6$ м) и Марса ($M_{\rm III} = 6{,}50 \cdot 10^{23}$ кг; $R_{\rm III} = 3{,}39 \cdot 10^6$ м) вблизи их поверхности.

Дано

$M_{\rm I} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг,
$M_{\rm II} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг,
$M_{\rm III} = 6{,}50 \cdot 10^{23}$ кг,
$R_{\rm I} = 6{,}37 \cdot 10^6$ м,
$R_{\rm II} = 1{,}74 \cdot 10^6$ м,
$R_{\rm III} = 3{,}39 \cdot 10^6$ м.

v_2 — ?

Решение

В первом приближении можно считать, что Земля, Луна и Марс представляют собой тела шарообразной формы, плотности которых зависят только от расстояний до их центров. Поэтому потенциал поля тяготения, создаваемого этими телами, для точек, лежащих на их поверхности, можно найти по формуле (6.25)

$$\varphi_{\rm т} = -\frac{\gamma M}{R},$$

где M — масса тела, R — его радиус.

Потенциальная энергия в поле тяготения для материальной точки с массой m, находящейся на поверхности тела, равна

$$W_{\rm п} = m\varphi_{\rm т} = -\frac{\gamma mM}{R}.$$

При удалении материальной точки в бесконечность ее потенциальная энергия возрастает до величины, равной нулю. Следовательно, для осуществления этого процесса необходимо совершить работу A против сил тяготения, причем

$$A = -W_{\rm п} = \frac{\gamma mM}{R}.$$

Работа A производится материальной точкой за счет уменьшения ее кинетической энергии. Точка может преодолеть притяжение тела, если ее начальная скорость v_0 у поверхности тела такова, что

$$\frac{mv_0^2}{2} \geqslant \frac{\gamma mM}{R}.$$

Наименьшее значение v_2 скорости v_0, удовлетворяющее этому условию, и есть искомая вторая космическая скорость у поверхности тела:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{\gamma mM}{R},$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

а) проверка размерности результата:

$$[v_2] = \frac{[\gamma]^{1/2} \cdot [M]^{1/2}}{[R]^{1/2}} = \frac{L^{3/2} \cdot M^{-1/2} \cdot T^{-1} \cdot M^{1/2}}{L^{1/2}} = LT^{-1},$$

б) вычисления·

Для Земли

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\rm I}}{R_{\rm I}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}}\ \text{м/с} = 11,2 \cdot 10^3\ \text{м/с};$$

для Луны

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\rm II}}{R_{\rm II}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^6}}\ \text{м/с} = 2,38 \cdot 10^3\ \text{м/с}$$

для Марса

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\rm III}}{R_{\rm III}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,50 \cdot 10^{23}}{3,39 \cdot 10^6}}\ \text{м/с} = 5,05 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Задача 6.2. Ракету запускают с поверхности Земли вертикально вверх. Отношение стартовой массы топлива и окислителя к общей массе ракеты равно 0,75. Относительная скорость истечения газов из сопла ракетного двигателя 4000 м/с. Через сколько времени после старта ракета начнет падать на Землю? Неоднородностью поля тяготения Земли и сопротивлением воздуха пренебречь

Дано

$$\frac{m_т}{m_0} = 0,75,$$

$$u = 4 \cdot 10^3\ \text{м/с}$$

t — ?

Решение

В процессе работы двигателя на ракету действуют две противоположные по направлению силы: реактивная сила тяги двигателя

$$\mathbf{F}_р = \mathbf{u}\frac{dm}{dt},$$

направленная вертикально вверх, и сила тяготения к Земле $\mathbf{F}_т = m\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ — напряженность поля тяготения Земли. $\mathbf{G} = \text{const}$, так как по условию задачи неоднородностью поля можно пренебречь Полагая, что сила $\mathbf{F}_т$ равна силе тяжести ракеты $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, получаем

$$\mathbf{G} = \mathbf{g} = \text{const},$$

где $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения.

Поэтому в промежутке времени от 0 до τ (τ — продолжительность работы двигателя) уравнение движения ракеты имеет вид:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt} + m\mathbf{g}.$$

или, в проекции на направление скорости v,

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} - mg,$$

откуда

$$dv = -u\,\frac{dm}{m} - g\cdot dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$v = -u\ln m - gt + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Ее значение можно определить из начальных условий. В момент старта ракеты $t = 0$, $v = 0$ и $m = m_0$ — стартовая масса ракеты. Следовательно,

$$C = u\ln m_0$$

и

$$v = u\ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

Скорость ракеты в момент окончания работы двигателя ($t = \tau$ и $m = m_0 - m_т$, где $m_т$ — масса топлива и окислителя):

$$v_1 = u\ln\frac{m_0}{m_0 - m_т} - g\,\tau = -u\ln\left(1 - \frac{m_т}{m_0}\right) - g\,\tau.$$

Дальше ракета движется равнозамедленно под действием ее силы тяжести $P_0 - P_т$, т. е. с ускорением, численно равным g, до тех пор, пока ее скорость не становится равной нулю и ракета не начинает падать обратно на Землю. Продолжительность t_1 равнозамедленного движения ракеты равна

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = -\frac{u}{g}\ln\left(1 - \frac{m_т}{m_0}\right) - \tau.$$

Таким образом, искомую продолжительность t подъема ракеты вверх можно определить следующим образом:

$$t = \tau + t_1 = -\frac{u}{g}\ln\left(1 - \frac{m_т}{m_0}\right).$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

а) проверка размерности результата:

$$[t] = \frac{[u]}{[g]} = \frac{LT^{-1}}{LT^{-2}} = T,$$

б) вычисления:

$$t = -\frac{4000}{9{,}81}\ln(1 - 0{,}75)\ \text{с} = \frac{4000}{9{,}81}\ln 4\ \text{с} = 565\ \text{с}.$$