Глава VII

ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

§ 7.1. Кинематика относительного движения

1. До сих пор для описания движения материальной точки или тела, т. е. системы материальных точек, мы всегда пользовались инерциальными системами отсчета. В то же время во многих случаях необходимо изучать движение материальной точки или тела по отношению к неинерциальной системе отсчета. Так, например, движение тел на Земле естественно рассматривать в скрепленной с ней земной системе отсчета, которая, строго говоря, не является инерциальной. В § 2.1 мы говорили, что в первом приближении можно обычно пренебречь неинерциальностью этой системы отсчета. Однако возможность такого допущения требует специального обоснования, так как иначе неясна величина допускаемых при этом погрешностей. Целый ряд явлений — «самопроизвольный» поворот плоскости качаний маятника (опыт Фуко), отклонение свободно падающих тел к востоку, подмывание одного из берегов реками, текущими в меридиональном направлении, и т. д. — вообще не могут быть объяснены в случае пренебрежения неинерциальностью земной системы отсчета.

2. Рассмотрим движение материальной точки M относительно двух прямоугольных декартовых систем координат X, Y, Z и X', Y', Z' (рис. 7.1). Пусть первая система координат является *инерциальной*, а вторая движется относительно нее произвольным образом. Систему X, Y, Z будем условно считать н е п о д в и ж н о й, а движение точки M относительно этой системы отсчета будем называть **абсолютным движением**. Движение точки M относительно подвижной системы отсчета X', Y', Z' будем называть **относительным движением**. Единичные векторы (орты), определяющие положительные направления осей неподвижной и подвижной систем координат, обозначим, соответственно через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$. Положение точки M относительно неподвижной системы координат определяется радиусом-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, а относительно подвижной — радиусом-вектором $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$, где x, y, z и x', y', z' — координаты точки M в этих системах. Из рис. 7.1 видно, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' + z'\,\mathbf{k}', \tag{7.1}$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор, проведенный из начала O неподвижной системы в начало O' подвижной системы координат.

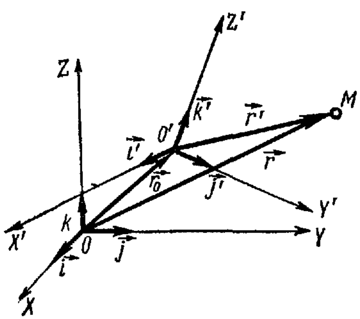

Рис. 7.1.

3. Скорость точки M относительно н е п о д в и ж н о й системы координат равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{7.2}$$

и называется **абсолютной скоростью** точки

M. Из (7.1) следует, что

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}, \tag{7.2'}$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \left(\frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'\right) + \left(x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right), \tag{7.3}$$

где

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \tag{7.4}$$

— абсолютная скорость точки O', т. е. скорость подвижной системы координат в ее поступательном движении. Вектор

$$\mathbf{v}_r = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' \tag{7.5}$$

по аналогии с (7.2) определяет скорость точки M относительно подвижной системы координат. Его называют **относительной скоростью** точки M.

Изменение ортов $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ подвижной системы координат может быть вызвано лишь тем, что эта система движется не только поступательно, но одновременно вращается вокруг точки O'. Следовательно, векторы $\frac{d\mathbf{i}'}{dt}$, $\frac{d\mathbf{j}'}{dt}$ и $\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$ являются линейными скоростями концов соответствующих ортов в этом вращательном движении. Если угловая скорость подвижной системы равна $\boldsymbol{\omega}$, то на основании формулы (1.22)

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i}'], \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j}'] \text{ и } \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}'], \tag{7.6}$$

а

$$x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, x'\mathbf{i}'] + [\boldsymbol{\omega}, y'\mathbf{j}'] + [\boldsymbol{\omega}, z'\mathbf{k}'] =$$

$$= [\boldsymbol{\omega}, (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')] = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']. \tag{7.7}$$

На основании соотношений (7.4), (7.5) и (7.7) уравнение (7.3) можно теперь переписать в таком виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'] + \mathbf{v}_r. \tag{7.8}$$

Сумма первых двух членов правой части этого равенства представляет собой абсолютную скорость той точки подвижной системы (т. е. жестко связанной с этой системой), через которую в данный момент времени проходит рассматриваемая нами материальная точка M. Эту скорость называют **переносной скоростью** точки M и обозначают через $\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']. \tag{7.9}$$

Таким образом, *абсолютная скорость точки M равна сумме ее переносной и относительной скоростей*:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \tag{7.10}$$

4. **Абсолютным ускорением** точки M называют ее ускорение по отношению к неподвижной инерциальной системе отсчета:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Из уравнений (7.10) и (7.9) следует, что

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{r}'\right] + \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right] + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt},$$

или, на основании (7.5) и (7 6),

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}'] + \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r] + \mathbf{a}_r, \tag{7.11}$$

где

$$\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \tag{7.12}$$

— ускорение подвижной системы в ее поступательном движении,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{7.13}$$

— угловое ускорение подвижной системы,

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\mathbf{k}' \tag{7.14}$$

— **относительное ускорение** точки M (ее ускорение по отношению к подвижной системе).

Из сопоставления формул (7.2′), (7.4) и (7.8) видно, что

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'] + \mathbf{v}_r.$$

Поэтому уравнение (7 11) можно записать в такой форме:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r] + \mathbf{a}_r, \tag{7.15}$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_\text{к} + \mathbf{a}_r, \tag{7.16}$$

где

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] \tag{7.17}$$

— **переносное ускорение** точки M, равное абсолютному ускорению той точки подвижной системы, через которую в данный момент времени проходит рассматриваемая материальная точка M;

$$\mathbf{a}_\text{к} = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r] \tag{7.18}$$

— **кориолисово**, или **поворотное, ускорение** точки M, обусловленное вращением подвижной системы.

Таким образом, равенство (7.16) свидетельствует о том, что *абсолютное ускорение точки равно сумме ее переносного, кориолисова и относительного ускорений.*

Квк видно из (7.18), кориолисово ускорение максимально, если относительная скорость точки $\mathbf{v}_r$, перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости подвижной системы. Если угол между векторами $\mathbf{v}_r$ и $\boldsymbol{\omega}$ равен 0 или π, то корнолисово ускорение равно нулю

5. Если подвижная система так же, как и неподвижная, является инерциальной, то $\omega = \varepsilon = \mathbf{a}_0 = 0$, $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_к = 0$, и уравнения (7.10) и (7.16) переходят в известные соотношения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_r = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}$$

вытекающие из преобразований Галилея (см. § 2.5).

В том случае, когда подвижная система движется только поступательно ($\omega = \varepsilon = 0$), уравнения (7.10) и (7.16) имеют следующий вид:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_0 + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}$$

§ 7.2. Силы инерции

1. В неинерциальных системах отсчета не выполняются законы Ньютона. Оказывается, что ускорение $\mathbf{a}_r$ материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета не удовлетворяет второму закону Ньютона, т. е. не равно отношению равнодействующей $\mathbf{F}$ всех сил, приложенных к материальной точке со стороны взаимодействующих с ней тел, к массе m этой точки:

$$\mathbf{a}_r \neq \frac{\mathbf{F}}{m}$$

В частности, при $\mathbf{F} = 0$ ускорение $\mathbf{a}_r$, вообще говоря, отлично от нуля. Иными словами, материальная точка или твердое тело могут изменять состояние своего движения по отношению к неинерциальной системе отсчета без всякого воздействия на них со стороны других тел. В справедливости сказанного каждый не раз убеждался, пользуясь любым из видов транспорта. Так, например, люди, неподвижно стоящие в равномерно и прямолинейно движущемся трамвае, отклоняются назад при ускорении движения трамвая или вперед — при его замедлении. При переходе трамвая с прямолинейного пути на закругление пассажиры отклоняются в сторону, противоположную центру кривизны траектории. Если бы пол трамвая был идеально гладким, то при всяком изменении скорости трамвая его пассажиры должны были бы скользить по полу, несмотря на то, что на них не действуют никакие горизонтальные силы. Это явление проще всего обнаружить, наблюдая за движением гладкого стального шарика по поверхности горизонтальной стеклянной пластины, прикрепленной к полу вагона трамвая.

2. Для нахождения относительного ускорения $\mathbf{a}_r$ материальной точки в неинерциальной системе отсчета и зависимости $\mathbf{a}_r$ от действующих на точку сил воспользуемся соотношением (7.16):

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a} - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_к;$$

откуда

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_к,$$

где m — масса материальной точки.