

5. Если подвижная система так же, как и неподвижная, является инерциальной, то $\omega = \varepsilon = a_0 = 0$, $v_e = v_0$, $a_e = a_k = 0$, и уравнения (7.10) и (7.16) переходят в известные соотношения:

$$v = v_0 + v_r \quad \text{и} \quad a = a_r = \frac{dv_r}{dt}$$

вытекающие из преобразований Галилея (см. § 2.5).

В том случае, когда подвижная система движется только поступательно ($\omega = \varepsilon = 0$), уравнения (7.10) и (7.16) имеют следующий вид:

$$v = v_0 + v_r \quad \text{и} \quad a = a_0 + a_r = a_0 + \frac{dv_r}{dt}$$

§ 7.2. Силы инерции

1. В неинерциальных системах отсчета не выполняются законы Ньютона. Оказывается, что ускорение a_r материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета не удовлетворяет второму закону Ньютона, т. е. не равно отношению равнодействующей F всех сил, приложенных к материальной точке со стороны взаимодействующих с ней тел, к массе m этой точки:

$$a_r \neq \frac{F}{m}$$

В частности, при $F = 0$ ускорение a_r , вообще говоря, отлично от нуля. Иными словами, материальная точка или твердое тело могут изменять состояние своего движения по отношению к неинерциальной системе отсчета без всякого воздействия на них со стороны других тел. В справедливости сказанного каждый не раз убеждался, пользуясь любым из видов транспорта. Так, например, люди, неподвижно стоящие в равномерно и прямолинейно движущемся трамвае, отклоняются назад при ускорении движения трамвая или вперед — при его замедлении. При переходе трамвая с прямолинейного пути на закругление пассажиры отклоняются в сторону, противоположную центру кривизны траектории. Если бы пол трамвая был идеально гладким, то при всяком изменении скорости трамвая его пассажиры должны были бы скользить по полу, несмотря на то, что на них не действуют никакие горизонтальные силы. Это явление проще всего обнаружить, наблюдая за движением гладкого стального шарика по поверхности горизонтальной стеклянной пластины, прикрепленной к полу вагона трамвая.

2. Для нахождения относительного ускорения a_r материальной точки в неинерциальной системе отсчета и зависимости a_r от действующих на точку сил воспользуемся соотношением (7.16):

$$a_r = a - a_e - a_k;$$

откуда

$$ma_r = ma - ma_e - ma_k,$$

где m — масса материальной точки.

Поскольку a — ускорение точки по отношению к инерциальной системе отсчета, то в соответствии со вторым законом Ньютона

$$ma = F, \quad (7.19)$$

где F — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке со стороны других тел. Следовательно,

$$ma_r = F - ma_e - ma_k.$$

Величины $I_e = -ma_e$ и $I_k = -ma_k$ имеют размерность силы. Их называют, соответственно, *переносной* и *кориолисовой (поворотной) силами инерции*.

Таким образом,

$$ma_r = F + I_e + I_k. \quad (7.20)$$

Уравнения относительного (7.20) и абсолютного (7.19) движений материальной точки, т. е. ее движений по отношению к произвольной (неинерциальной) и инерциальной системам отсчета, сходны по форме. Различие между ними состоит лишь в том, что в относительном движении необходимо, помимо «обычных» сил (сил взаимодействия между телами), учитывать две дополнительные силы инерции. Силы инерции реально действуют на материальную точку в неинерциальной системе отсчета и могут быть измерены, например, с помощью пружинного динамометра. Однако в отличие от «обычных» сил для сил инерции нельзя указать, действие каких именно тел на рассматриваемую материальную точку они выражают. Следовательно, к этим силам неприменим третий закон Ньютона. Эта особенность сил инерции не является неожиданной, так как величины I_e и I_k в уравнении (7.20) обусловлены только неинерциальностью системы отсчета и никак не связаны с действием на материальную точку со стороны других тел, учитываемым вектором F . Иными словами, силы инерции по существу нельзя называть силами (см. определение силы, данное в § 2.2). Введение этих «сил» оправдывается лишь тем, что с их помощью уравнение относительного движения точки приводится к виду, соответствующему второму закону Ньютона.

Важно подчеркнуть, что благодаря отмеченной особенности сил инерции в неинерциальных системах отсчета не существует замкнутых систем тел — для любого из тел системы силы инерции являются внешними. Поэтому в *неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии*.

3. Рассмотрим некоторые простейшие примеры неинерциальных систем.

а) Система движется поступательно с ускорением a_0 . В этом случае переносное ускорение $a_e = a_0$, а кориолисово ускорение $a_k = 0$. Поэтому на материальную точку действует только переносная сила инерции $I_e = -ma_0$.

Если отвлечься от сравнительно слабого влияния суточного вращения Земли, то примером такой системы отсчета может слу-

жить лифт, ускоренно поднимающийся или опускающийся по вертикали. Пусть к потолку кабины лифта прикреплен пружинный динамометр, к которому подвешено тело массой m . Требуется определить силу, действующую на динамометр, а также ускорение, с которым будет двигаться тело, если его освободить. Рассмотрим решения этой задачи, основанные на использовании как скрепленной с лифтом подвижной неинерциальной системы отсчета, так и неподвижной земной системы отсчета, которую с достаточной степенью точности можно считать инерциальной, если вместо силы тяготения тела к Земле рассматривать его силу тяжести (см. ниже случай б). При первом способе рассмотрения мы будем, как это принято для краткости, говорить о подвижном наблюдателе, а при втором — о неподвижном наблюдателе.

Для неподвижного наблюдателя на тело действуют две противоположно направленные силы — его сила тяжести $\mathbf{P} = mg$ и реакция динамометра \mathbf{R} . Равнодействующая этих сил сообщает телу ускорение a_0 . На основании второго закона Ньютона

$$ma_0 = mg + \mathbf{R}.$$

Следовательно, сила $\mathbf{T} = -\mathbf{R}$, действующая на динамометр, равна:

$$\mathbf{T} = m(\mathbf{g} - a_0).$$

Если тело освободить, т. е. нарушить его связь с динамометром, то оно будет свободно падать под действием силы тяжести с ускорением

$$a = \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{g}.$$

Для подвижного наблюдателя тело неподвижно ($v_r = a_r = 0$), причем на тело действуют три силы \mathbf{P} , \mathbf{R} и \mathbf{I}_e . Поэтому на основании уравнения (7.20)

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{I}_e = 0 \quad \text{или} \quad mg + \mathbf{R} - ma_0 = 0,$$

откуда для \mathbf{T} получается то же самое значение, что и найденное выше:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{R} = m(\mathbf{g} - a_0).$$

Если тело освободить, то оно будет двигаться под действием двух сил \mathbf{P} и \mathbf{I}_e с ускорением

$$a_r = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{I}_e}{m} = \mathbf{g} - a_0.$$

б) Система равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 и движется поступательно с постоянной скоростью v_0 . В этом случае $a_0 = 0$ и $\varepsilon = 0$, поэтому переносное и кориолисово ускорения равны соответственно

$$a_e = [\omega, [\omega, \mathbf{r}']] \quad \text{и} \quad a_k = 2[\omega, v_r].$$

Векторы ω и $[\omega, r']$ взаимно перпендикулярны. Следовательно, численное значение переносного ускорения материальной точки M равно

$$a_e = \omega |[\omega, r']| = \omega^2 r' |\sin \alpha| = \omega^2 \rho,$$

где α — угол между векторами ω и r' , $\rho = r' |\sin \alpha|$ — расстояние от точки M до оси вращения системы отсчета. Вектор a_e перпендикулярен к этой оси и направлен от точки M к сси. Таким образом, переносное ускорение a_e представляет собой не что иное, как *центробежное ускорение* точки M . Переносная сила инерции

$$I_e = -m a_e = -m [\omega, [\omega, r']]$$

численно равна $m\omega^2\rho$ и направлена в противоположную сторону, т. е. от оси вращения. Иными словами, сила I_e является **центробежной силой инерции**.

Центробежной силой инерции I_e , связанной с суточным вращением Земли, обусловлено отличие силы тяжести тела P от силы F тяготения его к Земле:

$$P = F + I_e$$

Поэтому, вводя вместо силы F силу тяжести тела во все уравнения механики, мы можем в первом приближении не учитывать неинерциальность земной системы отсчета. Основная погрешность, которую мы при этом допускаем, состоит в пренебрежении более слабым влиянием кориолисовой силы инерции. Явления, обусловленные этим влиянием, будут рассмотрены ниже в п. 6—8.

4. Действие центробежной силы инерции можно обнаружить с помощью следующего опыта. Установим на скамье Жуковского стул с прикрепленным к нему горизонтальным гладким столиком. Человек, сидящий на стуле, кладет на столик небольшой шар. Если скамья Жуковского не вращается, то шар неподвижно лежит на столике. Если скамья вращается, то шар соскальзывает со столика и падает на пол. Рассмотрим объяснения этого опыта неподвижным и подвижным наблюдателями.

Для неподвижного наблюдателя на шар, положенный на столик, действуют две взаимно уравновешивающиеся силы — сила тяжести шара P и реакция столика R (влиянием трения шара о гладкий столик можно пренебречь). Начальная скорость шара v_0 равна линейной скорости той точки A столика, куда был положен шар. Если расстояние от оси вращения до точки A равно ρ_0 , а угловая скорость вращения ω , то вектор v_0 направлен по касательной к окружности радиуса ρ_0 и численно равен $\omega\rho_0$. Так как $P + R = 0$, то шар, положенный на столик, движется по инерции с постоянной скоростью v_0 до тех пор, пока не упадет, дойдя до края столика.

Для подвижного наблюдателя, сидящего на вращающемся стуле, на шар действуют три силы: P , R и центробежная сила инерции I_e . Первые две силы взаимно уравновешиваются. По-

этому шар движется под действием силы I_e , ускоренно удаляясь от оси вращения.

В процессе движения шара по столику на шар действует также кориолисова сила инерции $I_k = -2 m[\omega, v_r]$. Эта сила перпендикулярна к скорости шара относительно столика и параллельна горизонтальной плоскости. Поэтому относительно подвижного наблюдателя шар движется по криволинейной траектории.

Для измерения центробежной силы инерции человек, сидящий на вращающемся стуле, должен удерживать шар с помощью пружинного динамометра так, чтобы шар был неподвижен относительно столика и кориолисова сила инерции равнялась нулю.

5. Действие центробежной силы инерции широко используют в технике: в центробежных насосах, сепараторах, центробежном регуляторе Уатта и т. д. При проектировании быстро вращающихся деталей машин — роторов паровых и газовых турбин, компрессоров, электрических двигателей и генераторов, коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания, винтов самолетов и других принимаются специальные меры для уравнивания центробежных сил инерции. Например, в случае деталей, симметричных относительно оси вращения, производят их тщательную статическую и динамическую балансировку, так как малейшее смещение центра инерции в сторону от оси вызывает при быстром вращении детали столь большие дополнительные нагрузки на ее подшипники, что они быстро разрушаются.

В случае несимметричных деталей, например коленчатых валов, применяют специальные противовесы.

При расчете на прочность быстро вращающихся деталей машин учет центробежных сил инерции совершенно необходим, так как эти силы во многих случаях играют определяющую роль.

6. Рассмотрим некоторые явления, обусловленные неинерциальностью земной системы отсчета. Основной причиной неинерциальности этой системы является суточное вращение Земли. Из опытов известно, что тело, свободно падая с вершины башни, движется не по вертикали, а слегка отклоняется к востоку. Это отклонение Δ тем больше, чем больше высота башни h , и зависит от географической широты места проведения опыта. При прочих равных условиях величина Δ максимальна на экваторе и равна нулю на полюсах. Поясним этот результат в простейшем случае падения тела на экваторе, пользуясь как неподвижной (инерциальной), так и подвижной (земной) системами отсчета, т. е. излагая точки зрения неподвижного и подвижного наблюдателей.

Для неподвижного наблюдателя на свободно падающее тело действует только сила F тяготения его к Земле. Эта сила сообщает телу ускорение a , направленное к центру Земли. Следовательно, сила F не изменяет численного значения линейной скорости тела в суточном вращении вместе с Землей. Иными словами, в процессе падения тело сохраняет значение v_1 этой скорости, соответствующее вершине башни (рис. 7.2.). В то же время линейная скорость

v_0 основания башни меньше v_1 :

$$v_1 - v_0 = \omega(R+h) - \omega R = \omega h,$$

где R — радиус Земли, ω — угловая скорость ее суточного вращения. Поэтому точка приземления тела должна быть несколько смещена к востоку (в направлении вращения Земли) по сравнению с вершиной башни.

Для подвижного наблюдателя на тело, помимо силы F тяготения к Земле, действуют центробежная I_e и кориолисова I_k силы инерции. Первые две силы направлены радиально: F — к центру Земли, I_e — от центра Земли. Поэтому их равнодействующая должна была бы вызывать строго вертикальное падение тела. Однако кориолисова сила инерции

$$I_k = -2m[\omega, v_r],$$

перпендикулярная к скорости v_r падения тела, вызывает искривление его траектории и смещение точки приземления к востоку (рис. 7. 3).

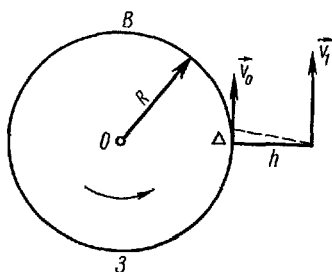


Рис. 7.2.

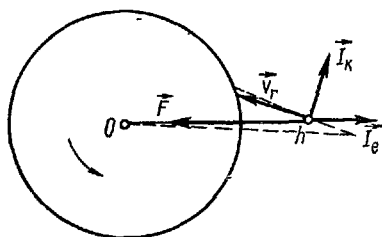


Рис. 7.3.

На полюсах Земли этот эффект отсутствует, так как векторы ω и v_r направлены вдоль одной прямой — оси вращения Земли, и $I_k = 0$.

7. Аналогичным образом можно объяснить, почему реки, текущие в меридиональном направлении, всегда подмывают вполне определенный берег: правый по течению — для рек северного полушария Земли и левый — для рек южного полушария. Например, реки северного полушария, текущие с севера на юг, подмывают западный берег.

Рассмотрим объяснение этого явления неподвижным наблюдателем. Численные значения линейных скоростей точек поверхности Земли в ее суточном вращении зависят от географической широты φ :

$$v = v_0 \cos \varphi,$$

где v_0 — линейная скорость точек экватора. Поэтому частицы воды, перемещаясь с севера на юг, должны увеличивать свою линейную скорость v . Так как эта скорость направлена с запада на восток, то ее увеличение может осуществляться только за счет взаимодействия частиц воды с западным берегом реки, который подмывается при этом.

Для подвижного наблюдателя на частицы воды, движущиеся с севера на юг с относительной скоростью v_r , действуют кориолисовы силы инерции I_k , которые направлены с востока на запад (рис. 7.4.). Поэтому частицы воды отклоняются в том же направлении, подмывая западный берег реки.

8. Неинерциальность земной системы отсчета легко обнаружить на опыте с помощью маятника Фуко. Маятник Фуко представляет собой симметричное тяжелое тело, подвешенное на длинной нити. Крепление нити к опоре осуществляется таким образом, чтобы вращение опоры не сказывалось на свободных колебаниях маятника под дейст-

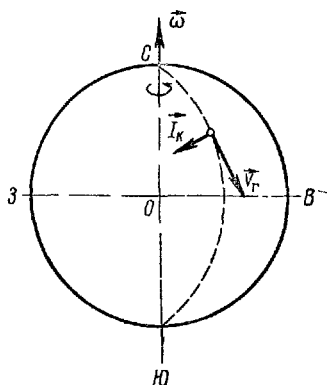


Рис. 7.4.

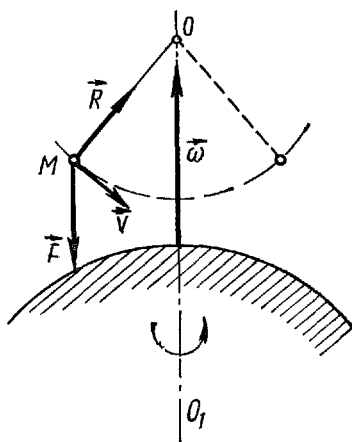


Рис. 7.5.

вию его силы тяжести. Опыт с таким маятником был проведен в 1851 г. французским физиком Л. Фуко. Фуко обнаружил, что плоскость качаний маятника постепенно изменяет свою ориентацию по отношению к земной системе отсчета. Угловая скорость Ω этой плоскости зависит от географической широты φ места проведения опыта. Она максимальна на полюсах Земли и равна нулю на экваторе:

$$\Omega = \omega \sin \varphi,$$

где ω — угловая скорость суточного вращения Земли.

Рассмотрим объяснение этого явления неподвижным наблюдателем. Предположим вначале, что маятник установлен на северном полюсе Земли (рис. 7.5). На маятник (груз M) действуют две силы — сила F тяготения к Земле и реакция R нити. Обе эти силы лежат в вертикальной плоскости качания маятника, проходящей через ось OO_1 вращения Земли и точку начального отклонения маятника. Никакие иные силы на маятник не действуют. Поэтому плоскость качания маятника сохраняет неизменную ориентацию по отношению к неподвижному наблюдателю. В то же время любая вертикальная плоскость, скрепленная с Землей, вращается с запада на восток с угловой

скоростью ω суточного вращения Земли. Следовательно, плоскость качаний маятника вращается относительно земной системы отсчета с угловой скоростью $\Omega = -\omega$, т. е. с востока на запад.

Пусть теперь маятник Фуко установлен в произвольной точке поверхности Земли (рис. 7.6). На маятник по-прежнему действуют две силы — сила тяготения к Земле и реакция нити, которые вновь лежат в вертикальной плоскости, проходящей через прямую AO , где O — центр Земли. Для дальнейшего анализа удобно разложить вектор ω угловой скорости вращения Земли на две составляющие: вектор ω_1 , направленный вдоль вертикали OA , и перпендикулярный к нему вектор ω_2 . Такое разложение соответствует представлению суточного вращения Земли в виде двух одновременных ее вращений вокруг взаимно перпендикулярных осей. Если географическая широта точки A равна φ , то, как видно из рис. 7.6,

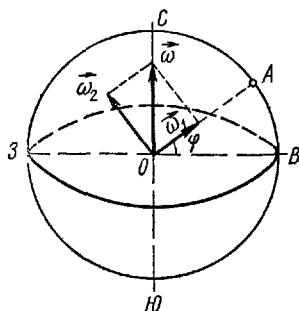


Рис. 7.6.

$$\omega_1 = \omega \sin \varphi \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega \cos \varphi.$$

Вращение Земли с угловой скоростью ω_2 вызывает соответствующее перемещение точки подвеса маятника, т. е. поворот вместе с Землей вертикали OA и проходящей через нее плоскости качаний маятника. При этом не происходит никакого изменения ориентации плоскости качаний маятника относительно земной системы отсчета

Вращение Земли с угловой скоростью ω_1 сказывается на маятнике Фуко, установленном в точке A , так же, как вращение с угловой скоростью ω сказывается на маятнике, установленном на полюсе. Поэтому плоскость качаний маятника вращается относительно земной системы отсчета с угловой скоростью

$$\Omega = -\omega_1,$$

или, по абсолютной величине,

$$\Omega = \omega_1 = \omega \sin \varphi.$$

Подвижный наблюдатель, находящийся на Земле, объясняет вращение плоскости качаний маятника Фуко действием перпендикулярной к этой плоскости кориолисовой силы инерции

$$I_k = -2 m [\omega, v_r],$$

где m — масса маятника, а v_r — скорость его движения относительно Земли. При малой амплитуде качаний маятника с длинной нитью его траектория близка к горизонтальной прямой, т. е. скорость v_r перпендикулярна к вертикали OA (см. рис. 7.6). Поэтому численное значение кориолисовой силы инерции равно

$$I_k = 2 m \omega_1 v_r = 2 m \omega v_r \sin \varphi.$$

Сила Кориолиса вызывает искривление траектории маятника, которая благодаря этому имеет сложную форму. На рис. 7.7 изображен примерный вид траектории маятника, установленного на северном полюсе Земли. В начальный момент времени маятник отпускают из крайнего отклоненного положения A_0 без начальной скорости по отношению к Земле. Предполагается, что затухание колебаний отсутствует, а точка O соответствует положению равновесия. Сплошной стрелкой показано направление вращения Земли. Из рис. 7.7 видно, что, выйдя из точки A_0 , маятник после одного полного колебания возвращается не в точку A_0 , а в точку A_1 ; после второго полного колебания — в точку A_2 и т. д. Несовпадение точек A_1 , A_2 и т. д. с A_0 объясняется искривлением траектории маятника под действием кориолисовой силы инерции. Эта сила и кривизна траектории максимальны там, где маятник имеет наибольшую скорость v , т. е. вблизи точки O . В крайних отклоненных положениях маятника (точки на окружности) $v = 0$, $I_x = 0$ и кривизна траектории тоже равна нулю.

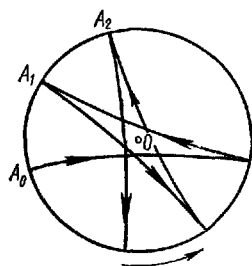


Рис 7.7

Из сказанного следует, что земной наблюдатель может лишь более или менее условно говорить о существовании плоскости качаний маятника и ее вращении, понимая под последним перемещение крайних положений маятника из точки A_0 в точки A_1 , A_2 и т. д. в направлении, противоположном направлению вращения Земли.

9. Различное объяснение рассмотренных нами явлений неподвижным и подвижным наблюдателями отнюдь не свидетельствует об отсутствии объективных закономерностей этих явлений и произвола в их истолковании в зависимости от субъективных особенностей того или иного наблюдателя. Рассматривая движения тел относительно неинерциальной системы отсчета с позиций механики Ньютона, подвижный наблюдатель, хочет он того или нет, должен вводить силы инерции. Необходимость использования сил инерции является выражением того объективного, т. е. не зависящего от воли и сознания наблюдателя, факта, что законы Ньютона неприменимы в неинерциальных системах отсчета.

10. В заключение необходимо указать на важное сходство, существующее между силами инерции и силами тяготения. Как видно из предыдущего, силы инерции пропорциональны массам материальных точек и при прочих равных условиях сообщают им одинаковые относительные ускорения. Точно таким же свойством обладают силы тяготения: сила, действующая на материальную точку, равна произведению массы этой точки на напряженность поля тяготения. Следовательно, в одной и той же точке поля тяготения эти силы, подобно силам инерции, пропорциональны массам материальных точек и всем им сообщают одинаковые ускорения, равные напряженности поля. Таким образом, действие на материальную точку (или систему материальных

точек) сил инерции можно заменить действием эквивалентного им поля тяготения. Например, силам инерции, которые возникают в системе отсчета, движущейся поступательно с постоянным ускорением a_0 , эквивалентно однородное поле тяготения с напряженностью $\mathbf{G} = -\mathbf{a}_0$.

Из сказанного вытекает следующий вывод, называемый принципом эквивалентности: *движение тела по отношению к неинерциальной системе отсчета эквивалентно его движению относительно инерциальной системы, совершающемуся под влиянием всех реально взаимодействующих с ним тел, а также некоторого дополнительного поля тяготения.*

Принцип эквивалентности не следует понимать как утверждение тождественности сил инерции и тяготения. Поле тяготения, движение в котором (по отношению к инерциальной системе отсчета) эквивалентно движению в какой-либо неинерциальной системе отсчета, существенно отличается от реального гравитационного поля, создаваемого телами. В самом деле, как указывалось выше, поле тяготения, «эквивалентное» поступательно движущейся неинерциальной системе однородно и его напряженность $\mathbf{G} = -\mathbf{a}_0$. Следовательно, если в какой-то момент времени ускорение \mathbf{a}_0 системы изменится, то и напряженность «эквивалентного» поля тоже должна измениться, притом одновременно во всех точках пространства. Иными словами, изменения «эквивалентного» поля должны распространяться в пространстве с бесконечно большой скоростью в то время, как согласно теории относительности эта скорость для реальных полей не может превышать скорость света в вакууме. Далее, напряженность поля тяготения, создаваемого телами, убывает при удалении от этих тел и стремится к нулю в бесконечности. Напряженность «эквивалентного» поля этому условию не удовлетворяет. Например, напряженность поля, «эквивалентного» центробежным силам инерции, неограниченно возрастает при беспредельном удалении от оси вращения.

Вопросы для повторения

1. Приведите примеры, иллюстрирующие неприменимость законов Ньютона в неинерциальных системах отсчета
2. Чему равны переносная и кориолисова силы инерции? В чем отличаются эти силы от сил взаимодействия между телами?
3. Выведите уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета.
4. Почему в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения?
5. Чему равна и как направлена центробежная сила инерции?
6. Перечислите известные Вам явления, обусловленные неинерциальностью земной системы отсчета. Дайте объяснения этих явлений.
7. Сформулируйте и поясните принцип эквивалентности.

Примеры решения задач

Задача 7.1. Тело свободно падает с высоты 100 м на Землю. Определить отклонение тела к востоку под влиянием кориолисовой силы инерции, вызванной вращением Земли. Широта места падения 45° .