Глава VIII

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 8.1. Гармоническое колебательное движение

1. **Колебательным движением**, или просто колебаниями, называют всякое движение или изменение состояния, характеризуемое той или иной степенью повторяемости во времени значений физических величин, определяющих это движение или состояние. С колебаниями мы встречаемся при изучении самых различных физических явлений: звука, света, переменных токов, радиоволн, качаний маятников и т. д. Оказывается, что существует общность закономерностей этих явлений и математических методов их исследования. Поэтому основные законы учения о механических колебаниях, которые мы рассмотрим в этой главе, должны послужить прочным фундаментом для изучения различных видов колебаний в последующих разделах физики. Примерами колебательного движения в механике могут служить колебания маятников, струн, мембран телефонов, балансиров карманных часов, поршней двигателей внутреннего сгорания, мостов и других сооружений, подвергающихся переменной нагрузке, и т. д.

Колебательное движение называют **периодическим**, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через р а в н ы е промежутки времени Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые **гармонические колебания**. Колебания какой-либо физической величины x называются гармоническими, если ее зависимость от времени t имеет вид

$$x = A \sin (\omega t+\varphi_0), \tag{8.1}$$

или

$$x = A \cos (\omega t+\varphi_1), \tag{8.1'}$$

причем A, ω, φ_1 и φ_0 с течением времени не изменяются. Физический смысл этих величин будет пояснен дальше.

2. Рассмотрим колебания, происходящие под действием упругой силы, например колебания пружинного маятника. Пружинный маятник состоит из массивного шара, насаженного на горизонтальный стержень, вдоль которого он может скользить (рис. 8.1). На стержень надета стальная пружина, закрепленная на его конце и на шаре. Массой пружины по сравнению с массой шара можно пренебречь. В состоянии покоя шар находится в положении O (рис. 8.1, *а*). Если его передвинуть в поло-

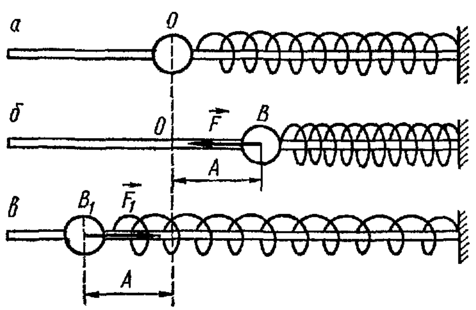

Рис. 8.1.

жение B (рис. 8.1, *б*), сжав пружину, а затем отпустить, то он начнет ускоренно двигаться влево под действием упругой силы пружины $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ (см. уравнение 3.10), где $\mathbf{x}$ — вектор смещения шара из положения равновесия O.

По мере приближения шара к положению равновесия численное значение упругой силы пружины, а значит и ускорение, с которым движется шар, уменьшаются и в точке O становятся равными нулю. За счет приобретенной кинетической энергии шар будет продолжать свое движение влево, растягивая пружину. Когда вся кинетическая энергия шара превратится в потенциальную энергию пружины (рис. 8.1, *в*), шар на мгновение остановится, после чего упругая сила

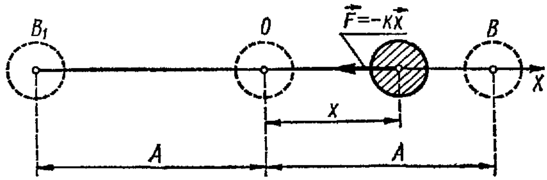

Рис. 8.2.

$\mathbf{F}_1$, растянутой пружины заставит его возвращаться в положение равновесия O и т. д.

В реальном случае часть энергии пружинного маятника будет затрачиваться на работу против сил трения, возникающих при скольжении шара вдоль стержня. Когда вся энергия маятника израсходуется на эту работу, колебания прекратятся.

Колебания, которые возникают в системе, не подверженной действию переменных внешних сил, в результате какого-либо начального отклонения этой системы от состояния устойчивого равновесия, называют **свободными.** Если система консервативная, то при колебаниях не происходит рассеяния энергии В этом случае свободные колебания называют **незатухающими.**

3. Покажем, что свободные незатухающие колебания, происходящие под действием упругих сил, являются гармоническими.

На рис. 8.2 изображен шар рассмотренного выше пружинного маятника в тот момент времени, когда его смещение равно x. Полная энергия W маятника в этом положении равна сумме кинетической энергии шара $W_к = \frac{mv^2}{2}$, потенциальной энергии упруго деформированной пружины $W_п = \frac{kx^2}{2}$ и потенциальной энергии шара в поле тяготения $W_{тяг}$. В положении B, соответствующем максимальному смещению A шара из положения равновесия O, его кинетическая энергия равна нулю ($W'_к = 0$), и полная энергия пружинного маятника складывается из энергии упруго деформированной пружины $W'_п = \frac{kA^2}{2}$ и потенциальной энергии тяготения $W'_{тяг}$. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + W_{тяг} = \frac{kA^2}{2} + W'_{тяг}. \qquad (8.2)$$

Маятник колеблется вдоль горизонтальной прямой, поэтому $W_{тяг} = W'_{тяг}$, и из уравнения (8.2) следует, что

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2),$$

отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, dt. \qquad (8.3)$$

Смещение x как функцию времени t можно определить путем интегрирования уравнения (8.3). Масса m шара и коэффициент k упругости пружины являются величинами, постоянными для данного пружинного маятника. Поэтому можно написать

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \int dt,$$

откуда

$$\arcsin \frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_0, \qquad (8.4)$$

где φ_0 — постоянная интегрирования. Численное значение φ_0 зависит от выбора момента начала отсчета времени:

а) если принять $t = 0$ при $x = 0$, то, как следует из уравнения (8.4), $\varphi_0 = \arcsin 0 = 0$, и уравнение (8.4) можно записать в виде

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right); \qquad (8.4')$$

б) если принять $t = 0$ при $x = A$, то $\varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, и уравнение (8.4) принимает вид

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right); \qquad (8,4'')$$

в) если принять $t = 0$ при $x = A\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ и

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{3}\right) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \frac{\pi}{6}\right), \qquad (8.4''')$$

и т. д.

В общем случае уравнение (8.4) можно записать в форме

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right), \tag{8.5}$$

или

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right), \tag{8.5'}$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$, так как при этом условии

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right),$$

и выражения (8.5) и (8.5′) тождественны.

Формулы (8.5) и (8.5′) полностью совпадают с формулами (8.1) и (8.1′), если ввести замену

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8.6}$$

Таким образом, мы доказали, что свободные незатухающие колебания пружинного маятника действительно являются гармоническими.

4. Величину A, равную максимальному смещению маятника (шара) из положения равновесия, называют **амплитудой** колебаний. Выражение $\Phi = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0$, стоящее под знаком синуса (или, соответственно, выражение $\omega t + \varphi_1$, стоящее под знаком косинуса), определяет смещение x в данный момент времени t. Его называют **фазой** колебания. В момент начала отсчета времени ($t = 0$) фаза колебания равна φ_0 (или φ_1). Поэтому величину φ_0 (φ_1) называют **начальной фазой колебания.** Фазу измеряют в радианах.

Величину ω, входящую в выражение для фазы колебания, называют **циклической** (или **круговой**) **частотой** колебаний. Физический смысл циклической частоты связан с понятиями периода колебаний T и частоты колебаний ν. **Периодом незатухающих колебаний** называют тот наименьший промежуток времени T, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания. За время T совершается одно полное колебание.

Обратимся вновь к колебаниям пружинного маятника. Колебания шара характеризуются не только его смещением, но также скоростью **v** и ускорением **a**. Шар движется прямолинейно вдоль оси OX (см. рис. 8.2). Поэтому значения v_x и a_x проекций векторов скорости и ускорения шара на положительное направление оси OX можно получить, дифференцируя по времени выражение (8.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)$$

и

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right) = -\frac{k}{m}x.$$

Так как по формуле (8.6) $\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega$, то окончательно:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= A\omega\cos(\omega t+\varphi_0), \\ a_x &= -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0) = -\omega^2 x, \end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

а при дифференцировании выражения (8.5′) получаем аналогично:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -A\omega\sin(\omega t+\varphi_1), \\ a_x &= -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_1) = -\omega^2 x. \end{aligned}\right\} \qquad (8.8)$$

Из определения периода колебаний T и уравнений (8.5), (8.6) и (8.7) следует, что за время T фаза колебаний изменяется на 2π рад. В самом деле, это наименьшее изменение фазы, при котором одновременно повторяются значения x, v_x и a_x. Следовательно,

$$[\omega(t+T)+\varphi_0]-(\omega t+\varphi_0)=2\pi$$

или

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (8.9)$$

Период колебаний пружинного маятника зависит только от его массы m и коэффициента упругости k пружины, но не зависит от амплитуды колебаний.

Частотой колебаний называют число полных колебаний, совершаемых за единицу времени:

$$\nu=\frac{1}{T}. \qquad (8.10)$$

Для пружинного маятника

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (8.10')$$

Из сравнения формул (8.9) и (8.10) следует, что

$$\omega=2\pi\nu. \qquad (8.11)$$

Таким образом, циклическая частота ω численно равна числу полных колебаний, совершаемых за 2π с. В этом и состоит ее физический смысл.

5. Запишем полученные выше выражения для смещения, скорости и ускорения пружинного маятника [уравнения (8.5) и (8.7)] в следующей форме:

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0), \qquad (8.5'')$$

$$v_x=v_0\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (8.7')$$

$$a_x=-a_0\sin(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 x, \qquad (8.7'')$$

где $v_0 = A\omega$ — амплитуда скорости и $a_0 = A\omega^2$ — амплитуда ускорения.

Шар пружинного маятника движется поступательно и по существу подобен материальной точке, колеблющейся по закону (8.5″). Из формул (8.5″), (8.7′) и (8.7″) можно сделать следующие выводы:

а) смещение, скорость и ускорение гармонически колеблющейся точки являются периодическими функциями от времени с одинаковыми периодами T;

б) скорость колеблющейся точки максимальна и по абсолютной величине равна амплитуде скорости в моменты прохождения колеблющейся точки через положение равновесия ($x = 0$). При максималь-

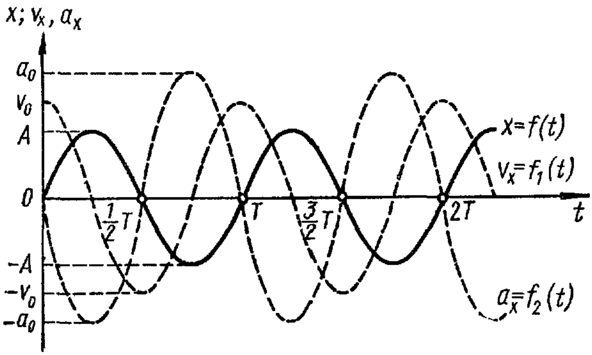

Рис. 8.3.

ных смещениях ($x = \pm A$) скорость равна нулю. Скорость всегда направлена в сторону движения;

в) ускорение равно нулю при прохождении колеблющейся точки через положение равновесия и достигает максимальных по абсолютной величине значений, равных амплитуде ускорения, при наибольших смещениях. Ускорение всегда направлено к положению равновесия: удаляясь от положения равновесия, колеблющаяся точка движется замедленно, приближаясь к нему — ускоренно. Из уравнения (8.7″) видно, что *ускорение прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения*. Этот результат может служить определением гармонических колебаний.

Зависимость x, v_x и a_x от времени t по формулам (8.5″), (8.7′) и (8.7″) представлена графически на рис. 8.3, причем для простоты принято, что $\varphi_0 = 0$.

6. Начальная фаза φ_0, как было показано в п. 3, определяется из начальных условий конкретной задачи. То же следует сказать и об амплитуде колебаний A. Так, например, в рассмотренном примере с пружинным маятником (см. рис. 8.1) амплитуда колебаний зависит от того, насколько была сжата пружина перед началом колебаний.

Найдем разность $\Delta\Phi$ между фазами смещения x и скорости v_x.

Для этого воспользуемся выражениями (8.5″) и (8.7′) и приведем их к сопоставимому виду:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\Phi_x, \\ v_x &= v_0\cos(\omega t + \varphi_0) = v_0\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = v_0\sin\Phi_v, \end{aligned}\right\} \quad (8.12)$$

где Φ_x и Φ_v — фазы смещения и скорости. Из (8.12) видно, что

$$\Delta\Phi = \Phi_x - \Phi_v = -\frac{\pi}{2}, \quad (8.13)$$

т. е. скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$.

Аналогично можно показать, что ускорение в свою очередь опережает скорость по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$\Phi_a - \Phi_v = \frac{\pi}{2}. \quad (8.14)$$

§ 8.2. Динамика гармонических колебаний

1. Второй закон Ньютона позволяет в общем виде записать связь между силой и ускорением при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или твердого тела) с массой m. Подставляя в уравнение (2.3) второго закона Ньютона выражение (8.7) для ускорения при гармонических колебаниях, получим

$$F_x = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x, \quad (8.15)$$

где F_x — проекция силы на направление оси OX, вдоль которой совершаются колебания.

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку, как видно из формулы (8.15), прямо пропорциональна смещению и всегда направлена к положению равновесия. Поэтому ее часто называют **возвращающей силой**. Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

2. Примером сил, удовлетворяющих соотношению (8.15), являются уже рассмотренные нами упругие силы. Силы, имеющие иную природу, чем упругие силы, но также удовлетворяющие условию (8.15), называют **квазиупругими**:

$$F_x = -kx, \quad (8.15')$$

где $k = m\omega^2$ — коэффициент квазиупругой силы.

В случае прямолинейных колебаний вдоль оси OX проекция ускорения на эту ось

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Подставив это выражение для a_x и значение F_x в форме (8.15′) во второй закон Ньютона, получим **основное уравнение прямолинейных**