Для этого воспользуемся выражениями (8.5″) и (8.7′) и приведем их к сопоставимому виду:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t+\varphi_0) = A\sin\Phi_x, \\ v_x &= v_0\cos(\omega t+\varphi_0) = v_0\sin\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right) = v_0\sin\Phi_v, \end{aligned}\right\} \quad (8.12)$$

где Φ_x и Φ_v — фазы смещения и скорости. Из (8.12) видно, что

$$\Delta\Phi = \Phi_x - \Phi_v = -\frac{\pi}{2}, \quad (8.13)$$

т. е. скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$.

Аналогично можно показать, что ускорение в свою очередь опережает скорость по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$\Phi_a - \Phi_v = \frac{\pi}{2}. \quad (8.14)$$

§ 8.2. Динамика гармонических колебаний

1. Второй закон Ньютона позволяет в общем виде записать связь между силой и ускорением при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или твердого тела) с массой m. Подставляя в уравнение (2.3) второго закона Ньютона выражение (8.7) для ускорения при гармонических колебаниях, получим

$$F_x = -m\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi_0) = -m\omega^2 x, \quad (8.15)$$

где F_x — проекция силы на направление оси OX, вдоль которой совершаются колебания.

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку, как видно из формулы (8.15), прямо пропорциональна смещению и всегда направлена к положению равновесия. Поэтому ее часто называют **возвращающей силой**. Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

2. Примером сил, удовлетворяющих соотношению (8.15), являются уже рассмотренные нами упругие силы. Силы, имеющие иную природу, чем упругие силы, но также удовлетворяющие условию (8.15), называют **квазиупругими**:

$$F_x = -kx, \quad (8.15')$$

где $k = m\omega^2$ — коэффициент квазиупругой силы.

В случае прямолинейных колебаний вдоль оси OX проекция ускорения на эту ось

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Подставив это выражение для a_x и значение F_x в форме (8.15′) во второй закон Ньютона, получим **основное уравнение прямолинейных**

гармонических колебаний, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,\\ \text{или}\quad &\\ &m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.16)$$

3. Рассмотрим несколько примеров свободных незатухающих колебаний тел.

Колебания тела, подвешенного на невесомой пружине (рис. 8.4), аналогичны рассмотренным выше колебаниям пружинного маятника. В самом деле, на тело массой m действуют упругая сила пружины $F_x = -kx$ и сила тяжести P. Напишем основное уравнение динамики для этого случая

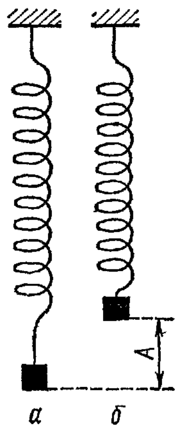

Рис. 8.4.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + P = -k(x - x_0),$$

где $x_0 = \frac{P}{k}$ — статическая деформация пружины под действием силы тяжести тела.

Обозначая через $x_1 = x - x_0$ и учитывая, что $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}$, так как x_0 не зависит от времени, получим уравнение движения тела

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1,$$

тождественное уравнению (8.16).

Поэтому формулы (8.6) и (8.9) справедливы также для колебаний тела, подвешенного на пружине.

4. В качестве второго примера рассмотрим малые колебания физического маятника. **Физическим маятником** называют абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси O, не проходящей через его центр тяжести. На рис. 8.5 изображено сечение физического маятника плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения O и проходящей через его центр масс C. Расстояние OC равно L.

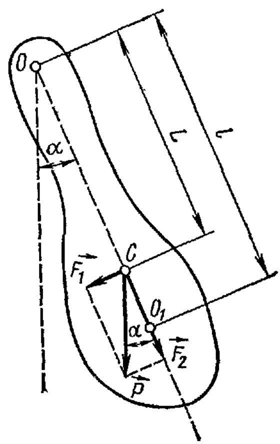

Рис. 8.5.

Пусть маятник отклонен из положения равновесия на небольшой угол α. Составляющая $\mathbf{F}_2$ силы тяжести маятника $\mathbf{P}$, направленная вдоль OC, уравновешивается реакцией оси O. Составляющая $\mathbf{F}_1$, перпендикулярная к OC, стремится возвратить маятник в положение равновесия. При малых углах α отклонения маятника из положения равновесия $\sin\alpha \approx \alpha$, где α измеряется в радианах.

Поэтому при малых колебаниях физического маятника момент его силы тяжести относительно оси вращения O равен

$$M = -mgL\alpha.$$

Знак минус в правой части этой формулы показывает, что сила тяжести всегда препятствует отклонению маятника из положения его равновесия, соответствующего значению $\alpha = 0$, т. е. что M — возвращающий момент.

Для получения зависимости угла поворота α от времени воспользуемся основным законом динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$-mgL\alpha = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

или

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL\alpha = 0,$$

где J — момент инерции маятника относительно оси O.

Если в последнем уравнении заменить α и J соответственно на x и m и обозначить mgL через k, то оно совпадает с уравнением (8.16). Поэтому период T малых колебаний физического маятника можно определить по формуле (8.9) для периода колебаний пружинного маятника, заменив в ней m и k соответственно через J и mgL:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} \qquad (8.17)$$

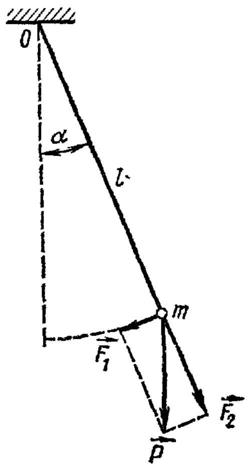

Рис. 8.6.

5. **Математическим маятником** называют материальную точку, подвешенную на невесомой, нерастяжимой нити и совершающую колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. На практике математическим маятником можно считать тяжелое тело, подвешенное на легкой нити, длина которой во много раз больше размеров тела. При отклонении маятника на угол α из положения равновесия (рис. 8.6) силу тяжести маятника $\mathbf{P}$ можно разложить на две составляющие $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, направленные, соответственно, перпендикулярно к нити и вдоль нее. Составляющая $\mathbf{F}_2$ вызывает натяжение нити маятника и уравновешивается реакцией, действующей на нить со стороны подвеса в точке O. Составляющая $\mathbf{F}_1$ стремится возвратить маятник

в положение равновесия ($\alpha = 0$). Так как невесомая нить все время натянута и нерастяжима, то математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника, у которого вся масса m сосредоточена в его центре масс. Поэтому, положив в формуле (8.17) $J = ml^2$ и $L = l$, получим следующее выражение для периода малых колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{8.18}$$

Таким образом, период малых колебаний математического маятника не зависит от его массы и амплитуды колебаний.

Можно показать, что в общем случае период колебаний математического маятника выражается формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\alpha_0}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\sin^4\frac{\alpha_0}{2} + \cdots\right),$$

где α_0 — максимальный угол отклонения маятника.

Если $\alpha_0 \leqslant 15°$, то относительная ошибка при вычислении по формуле (8.18) менее 0,5%.

Наблюдения над колебаниями маятников используются для определения ускорения g свободно падающих тел. Такие наблюдения имеют большое значение для изучения геологической структуры земной коры в верхних ее частях. Наличие под землей залежей руды или нефти влияет на численное значение g. Поэтому маятники применяются при геологических разведках этих ископаемых.

6. **Приведенной длиной** физического маятника называется длина такого математического маятника, который колеблется синхронно с физическим, т. е. имеет равный с ним период колебаний. Для нахождения приведенной длины l приравняем правые части формул (8.17) и (8.18):

$$2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда

$$l = \frac{J}{mL}. \tag{8.19}$$

По теореме о переносе осей инерции

$$J = J_C + mL^2,$$

где J_C — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс и параллельной оси качания O. Следовательно,

$$l = \frac{J_C + mL^2}{mL} = L + \frac{J_C}{mL}. \tag{8.19'}$$

Величины J_C, m и L всегда положительны, поэтому $l > L$. Точку O_1 (см. рис. 8.5), лежащую на продолжении прямой OC на расстоянии l от оси вращения O, называют **центром качаний** маятника. Можно показать, что период колебаний любого физического маятника остается неизменным, когда ось вращения переносят в центр качаний.

7. Вычислим энергию тела массой m, совершающего свободные гармонические колебания с амплитудой A, и циклической частотой ω. Потенциальная энергия $W_п$ тела, смещенного на расстояние x от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила $F_x = -kx$, перемещая тело в положение равновесия. Эту работу можно найти, воспользовавшись формулой (3.10). Заменив x по формуле (8.1), получим

$$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \tag{8.20}$$

Кинетическую энергию найдем, подставив в формулу (3.6), где $v^2 = v_x^2$, выражение для v_x из уравнения (8.7):

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \tag{8.21}$$

Заменив в уравнении (8.20) k через $m\omega^2$ и сложив почленно уравнения (8.20) и (8.21), получим следующее выражение для полной энергии W колеблющегося тела:

$$\left.\begin{array}{l} W = W_п + W_к = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)], \\ \text{или} \\ W = W_п + W_к = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2. \end{array}\right\} \tag{8.22}$$

Таким образом, полная механическая энергия тела, совершающего гармонические колебания, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. В случае свободных незатухающих колебаний полная механическая энергия W не должна зависеть от времени (см. § 8.1). Поэтому амплитуда A колебаний тоже не зависит от времени.

Из (8.20) и (8.21) видно, что как потенциальная, так и кинетическая энергия колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Кинетическая и потенциальная энергии при свободных незатухающих гармонических колебаниях изменяются периодически. Однако период изменения энергии в два раза меньше периода изменения смещения, скорости и ускорения. За время одного полного колебания кинетическая и потенциальная энергии дважды достигают своих амплитудных значений и дважды обращаются в нуль. Это связано с тем, что $W_к$ и $W_п$ пропорциональны квадратам косинуса и синуса фазы колебаний.

Максимальная потенциальная энергия тела, совершающего свободные гармонические колебания, как следует из уравнения (8.21), равна $\frac{1}{2}kA^2$. Максимальная кинетическая энергия этого тела (уравнение 8.22) равна $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$.