§ 8.3. Сложение гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой

1. Прежде чем рассматривать сложение колебательных движений, остановимся на способе представления колебаний посредством **вращающегося вектора амплитуды**. Пусть гармоническое колебательное движение можно описать уравнением:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_1).$$

Проведем прямую линию OX, которую условно назовем «опорной», и построим вектор $\mathbf{A}_0$, численно равный амплитуде A и направленный из точки O под углом φ_1 к опорной линии (рис. 8.7). Если начальная фаза положительна, то угол φ_1 откладывается от опорной линии в сторону, противоположную вращению часовой стрелки; если начальная фаза отрицательна, то угол φ_1 откладывается по часовой стрелке. Проекция вектора $\mathbf{A}_0$ на опорную линию равна смещению x_0 в момент начала отсчета времени ($t = 0$):

$$x_0 = A\cos\varphi_1.$$

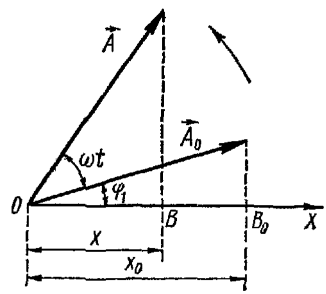

Рис. 8.7.

Будем вращать вектор амплитуды вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, с угловой скоростью ω (против часовой стрелки, если $\omega > 0$). За промежуток времени t вектор амплитуды повернется на угол ωt и займет положение, изображенное на рис. 8.7 вектором $\mathbf{A}$. Его проекция x на опорную линию равна

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_1).$$

За время T, равное периоду колебаний, вектор амплитуды повернется на угол 2π, а проекция B его конца совершит одно полное колебание около положения равновесия O. Следовательно, вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание. Представлением гармонических колебаний в виде вращающихся векторов широко пользуются при сложении колебаний.

2. Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой. Сложение этих колебаний удобно производить, пользуясь методом векторных диаграмм. Пусть колебания заданы уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

Так как колебания совершаются вдоль одной прямой, то и результирующие колебания будут происходить вдоль этой же прямой.

Отложим из точки O опорной линии под углом φ_1 вектор амплитуды $\mathbf{A}_1$ и под углом φ_2 вектор амплитуды $\mathbf{A}_2$ (рис. 8.8). Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью ω, поэтому угол $\varphi_2-\varphi_1$ между ними все время остается неизменным. Из математики известно, что проекция на любую ось равнодействующего вектора равна алгебраической сумме проекций на эту же ось всех составляющих векторов. Поэтому результирующие колебания могут быть изображены вектором амплитуды $\mathbf{A}$, равным сумме векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$:

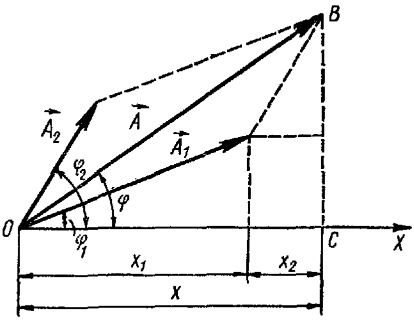

Рис. 8.8.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

и вращающимся вокруг точки O с той же угловой скоростью ω, что и векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Результирующие колебания должны быть гармоническими с циклической частотой ω:

$$x = A \cos (\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда результирующих колебаний, а φ — их начальная фаза.

Из рис. 8.8 видно, что квадрат амплитуды результирующих колебаний равен

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1), \tag{8.24}$$

а начальная фаза φ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{OC},$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \tag{8.25}$$

3. Из выражения (8 24) следует, что амплитуда A результирующих колебаний зависит от разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний. Так как разность $\varphi_2 - \varphi_1$ с течением времени не изменяется (такие синхронные колебания называют **когерентиыми**), то по формуле (8.24) можно получить определенное значение амплитуды A. Косинус любого угла не может быть больше $+1$ и меньше -1. Следовательно, возможные значения A заключены в пределах[1]:

$$A_1 + A_2 \geqslant A \geqslant |A_2 - A_1|.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

[1] Из определения понятия амплитуды колебаний следует, что амплитуда A не может быть отрицательиой

1) Разность фаз складываемых колебаний равна нулю или целому числу 2π:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \text{ и } A = A_1 + A_2.$$

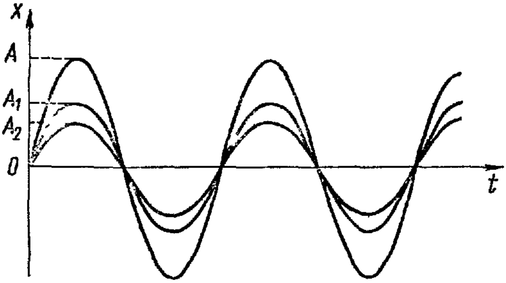

Рис. 8.9.

На рис. 8.9 приведены графики зависимости смещения от времени для складываемых и результирующего колебаний.

2) Разность фаз складываемых колебаний равна нечетному числу π:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n + 1), \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1,$$

$$A = |A_2 - A_1| = |A_1 - A_2|.$$

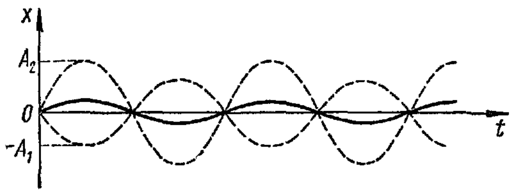

Рис. 8.10

Соответствующие графики зависимости смещения от времени для складываемых и результирующего колебаний приведены на рис 8.10 пунктирными и сплошной линиями.

4. Иначе обстоит дело, когда разность фаз складываемых некогерентных колебаний вида

$$x_1 = A_1 \cos[\omega t + \varphi_1(t)]$$

и

$$x_2 = A_2 \cos[\omega t + \varphi_2(t)]$$

произвольным образом изменяется во времени. В этом случае, как видно из уравнения (8.24), амплитуда A результирующих колебаний не остается постоянной, а изменяется в соответствии с изменением $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$. Поэтому при наложении некогерентных колебаний не имеет смысла говорить о сложении амплитуд.

В оптике будет показано, что при наложении одинаково направленных когерентных колебаний имеет место сложение амплитуд колебаний, а при наложении аналогичных, но некогерентных колебаний имеет место сложение их энергий.

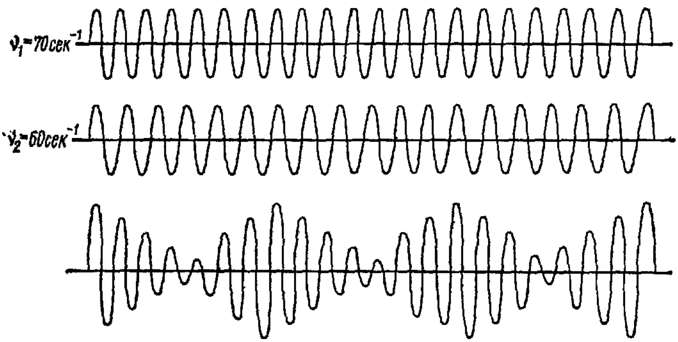

Рис. 8.11.

5. Если амплитуды двух гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой, одинаковы, а их частоты мало отличаются друг от друга, то в результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Происхождение этого явления легко представить себе из следующих рассуждений. Пусть вначале фазы обоих колебаний совпадают и амплитуда результирующего колебания равна сумме их амплитуд. Затем второе колебание начинает отставать по фазе от первого и амплитуда результирующего колебания убывает. Когда разность фаз слагаемых колебаний достигнет величины π, результирующая амплитуда станет равной разности амплитуд составляющих колебаний, т. е. в рассматриваемом случае будет равна нулю. При дальнейшем увеличении разности фаз амплитуда результирующего колебания снова возрастает и при разности фаз, равной 2π, становится равной сумме амплитуд и т. д. (рис. 8.11). Периодические изменения амплитуды от минимального значения до максимального называют **биениями**. Можно показать, что амплитуда результирующего колебания меняется с циклической частотой $\omega = |\omega_2 - \omega_1|$, которой соответствует частота $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$. Таким образом, частота биеиий равна разности частот складываемых колебаний.

Явление биений часто наблюдается при звуковых и электрических колебаниях. Демонстрировать биения можно, заставив одновременно звучать два камертона, обладающих несколько различными частотами свободных колебаний.

6. Колебания вида $x = A(t)\cos[\omega t + \varphi(t)]$ называют **модулированными.** Различают **амплитудно-модулированные** колебания, у которых $\left|\frac{dA}{dt}\right| \ll \omega A_{\text{макс}}$ и $\varphi = \text{const}$, где $A_{\text{макс}}$ — наибольшее значение амплитуды, и колебания, **модулированные по фазе** или **частоте**, у которых $A = \text{const}$ и $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \ll \omega$. Биения представляют собой простейший пример модулированных колебаний, у которых $A(t)$ и $\varphi(t)$ — периодические функции времени. Важной задачей теории колебаний является **гармонический анализ,** т. е. представление сложных модулированных колебаний в виде ряда простых гармонических колебаний. В общем виде эта задача была разрешена французским математиком Ж. Фурье, который показал, что любые сложные периодические колебания можно представить в виде ряда простых гармонических колебаний с кратными периодами: $x = f(t) = A_0 + A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3\sin(3\omega t + \varphi_3) + \ldots + A_n\sin(n\omega t + \varphi_n) + \ldots$, где $x = f(t)$ — функция, описывающая сложное колебание, ω — ее основная циклическая частота.

Число членов в ряде Фурье, вообще говоря, бесконечно велико. Однако возможны такие колебания, для которых ряды Фурье не содержат некоторых членов.

§ 8.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

1. Пусть материальная точка C одновременно участвует в двух гармонических колебаниях, совершающихся с одинаковыми периодами T в двух взаимно перпендикулярных направлениях. С этими направлениями можно связать прямоугольную систему координат XOY, расположив начало координат в положении равновесия точки (рис. 8.12). Обозначим смещение точки C вдоль осей OX и OY, соответственно, через x и y. Для того чтобы найти положение колеблющейся точки в какой-нибудь момент времени t, надо для этого момента времени найти ее смещения x и y и построить на них прямоугольник (рис. 8.12). Конец диагонали прямоугольника определит положение колеблющейся точки в момент времени t, а отрезок OC — результирующее смещение s.

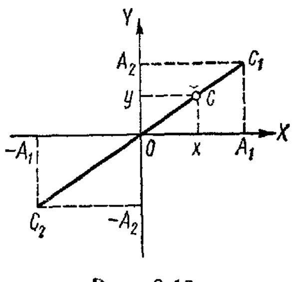

Рис. 8.12.

2. Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Начальные фазы колебаний одинаковы. Выберем момент начала отсчета времени таким образом, чтобы началь-