но звучать два камертона, обладающих несколько различными частотами свободных колебаний.

6. Колебания вида $x = A(t)\cos[\omega t + \varphi(t)]$ называют **модулированными.** Различают **амплитудно-модулированные** колебания, у которых $\left|\frac{dA}{dt}\right| \ll \omega A_{\text{макс}}$ и $\varphi = \text{const}$, где $A_{\text{макс}}$ — наибольшее значение амплитуды, и колебания, **модулированные по фазе** или **частоте,** у которых $A = \text{const}$ и $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \ll \omega$. Биения представляют собой простейший пример модулированных колебаний, у которых $A(t)$ и $\varphi(t)$ — периодические функции времени. Важной задачей теории колебаний является **гармонический анализ,** т. е. представление сложных модулированных колебаний в виде ряда простых гармонических колебаний. В общем виде эта задача была разрешена французским математиком Ж. Фурье, который показал, что любые сложные периодические колебания можно представить в виде ряда простых гармонических колебаний с кратными периодами: $x = f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \ldots + A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) + \ldots$, где $x = f(t)$ — функция, описывающая сложное колебание, ω — ее основная циклическая частота.

Число членов в ряде Фурье, вообще говоря, бесконечно велико. Однако возможны такие колебания, для которых ряды Фурье не содержат некоторых членов.

§ 8.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

1. Пусть материальная точка C одновременно участвует в двух гармонических колебаниях, совершающихся с одинаковыми периодами T в двух взаимно перпендикулярных направлениях. С этими направлениями можно связать прямоугольную систему координат XOY, расположив начало координат в положении равновесия точки (рис. 8.12). Обозначим смещение точки C вдоль осей OX и OY, соответственно, через x и y. Для того чтобы найти положение колеблющейся точки в какой-нибудь момент времени t, надо для этого момента времени найти ее смещения x и y и построить на них прямоугольник (рис. 8.12). Конец диагонали прямоугольника определит положение колеблющейся точки в момент времени t, а отрезок OC — результирующее смещение s.

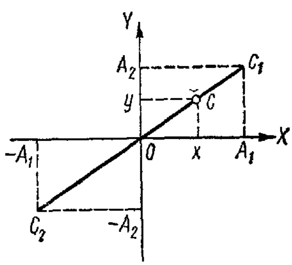

Рис. 8.12.

2. Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Начальные фазы колебаний одинаковы. Выберем момент начала отсчета времени таким образом, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю. Тогда смещения вдоль осей OX и OY можно выразить уравнениями

$$x = A_1 \sin \omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Поделив почленно эти равенства, получим уравнение траектории точки C:

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{или} \quad y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

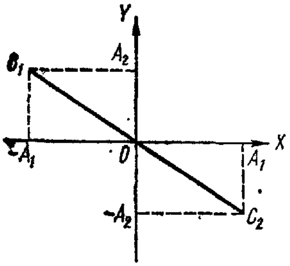

Рис. 8.13.

Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний точка C колеблется вдоль отрезка C_1C_2 прямой, проходящей через начало координат (рис. 8.12). Такие колебания называют **линейно поляризованными.**

б) Начальная разность фаз равна π. Уравнения колебаний в этом случае имеют вид:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \pi) = -A_1 \sin \omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Уравнение траектории точки C

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x.$$

Следовательно, точка C колеблется вдоль отрезка C_1C_2 прямой, проходящей через начало координат, но лежащей в других квадрантах, чем в первом случае (рис. 8.13). Амплитуда A результирующих колебаний в обоих рассмотренных случаях равна:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

в) Начальная разность фаз равна $\frac{\pi}{2}$. Уравнения колебаний имеют внд:

$$x = A_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cos \omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Разделим первое уравнение на A_1, второе — на A_2:

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t; \quad \frac{y}{A_2} = \sin \omega t.$$

Возведем оба равенства в квадрат и сложим их. Получим следующее уравнение траектории результирующего движения колеблющейся точки

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Колеблющаяся точка C движется по эллипсу с полуосями A_1 и A_2 (рис. 8.14). Мы получили случай так называемых **эллиптически поляризованных колебаний.** Выясним, в каком направлении будет совершаться движение точки по эллипсу. Для этого, пользуясь уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega t$, найдем положения точки C в два последующих момента времени и отметим их на рис. 8.14: при $t_1 = 0$; $x_1 = A_1$; $y_1 = 0$ — точка C_1, при $t_2 = T/4$; $x_2 = 0$; $y_2 = A_2$. Следовательно, точка C движется по эллипсу п р о т и в ч а с о в о й с т р е л к и.

Предлагаем читателю доказать, что при разности фаз, равной $3\pi/2$ получится такое же эллиптически поляризованное колебание, но точка C будет двигаться по часовой стрелке. Если, кроме того, равны амплитуды обоих колебаний ($A_1 = A_2$), то точка C будет двигаться по окружности. Такие колебания называют **циркулярно поляризованными.**

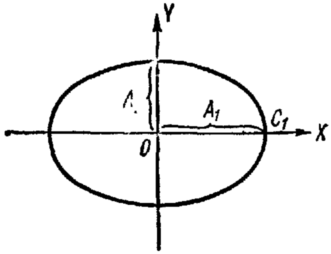

Рис. 8.14.

г) Все остальные разности фаз, кроме рассмотренных, дают эллипсы, не приведенные к осям OX и OY.

3. Различные кривые, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний, принято называть **фигурами Лиссажу.** Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз колебаний. Поэтому в простейших случаях частоты двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний можно сравнивать по форме фигур Лиссажу.

§ 8.5. Затухающие колебания

1. Все реальные колебательные системы являются диссипативными (см. § 3.3). Энергия механических колебаний такой системы постепенно расходуется на работу против сил трения, поэтому свободные колебания всегда затухают — их амплитуда постепенно уменьшается.

Это можно наблюдать на опыте с маятником Д. Максвелла, представляющим собой диск, ось которого подвешена на двух накручивающихся на нее нитях (рис. 8.15). Под действием силы тяжести маятник Максвелла совершает колебания в вертикальном направлении и вместе с тем крутильные колебания вокруг своей оси. Закрутив маятник, мы приподнимаем его на высоту H над положением равновесия (условным нулевым уровнем) и сообщаем ему потенциальную энергию mgH. Опустившись до положения равновесия, маятник, энергия которого перешла

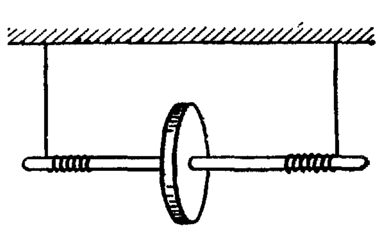

Рис. 8.15.