Колеблющаяся точка C движется по эллипсу с полуосями A_1 и A_2 (рис. 8.14). Мы получили случай так называемых **эллиптически поляризованных колебаний.** Выясним, в каком направлении будет совершаться движение точки по эллипсу. Для этого, пользуясь уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega t$, найдем положения точки C в два последующих момента времени и отметим их на рис. 8.14: при $t_1 = 0$; $x_1 = A_1$; $y_1 = 0$ — точка C_1, при $t_2 = T/4$; $x_2 = 0$; $y_2 = A_2$. Следовательно, точка C движется по эллипсу против часовой стрелки.

Предлагаем читателю доказать, что при разности фаз, равной $3\pi/2$ получится такое же эллиптически поляризованное колебание, но точка C будет двигаться по часовой стрелке. Если, кроме того, равны амплитуды обоих колебаний ($A_1 = A_2$), то точка C будет двигаться по окружности. Такие колебания называют **циркулярно поляризованными.**

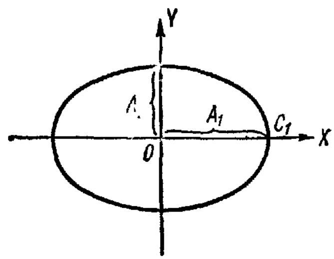

Рис. 8.14.

г) Все остальные разности фаз, кроме рассмотренных, дают эллипсы, не приведенные к осям OX и OY.

3. Различные кривые, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний, принято называть **фигурами Лиссажу.** Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз колебаний. Поэтому в простейших случаях частоты двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний можно сравнивать по форме фигур Лиссажу.

§ 8.5. Затухающие колебания

1. Все реальные колебательные системы являются диссипативными (см. § 3.3). Энергия механических колебаний такой системы постепенно расходуется на работу против сил трения, поэтому свободные колебания всегда затухают — их амплитуда постепенно уменьшается.

Это можно наблюдать на опыте с маятником Д. Максвелла, представляющим собой диск, ось которого подвешена на двух накручивающихся на нее нитях (рис. 8.15). Под действием силы тяжести маятник Максвелла совершает колебания в вертикальном направлении и вместе с тем крутильные колебания вокруг своей оси. Закрутив маятник, мы приподнимаем его на высоту H над положением равновесия (условным нулевым уровнем) и сообщаем ему потенциальную энергию mgH. Опустившись до положения равновесия, маятник, энергия которого перешла

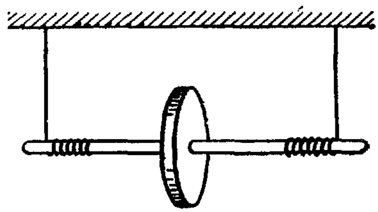
Рис. 8.15.

теперь в кинетическую, не остановится, а начнет опять подниматься, нити будут вновь накручиваться на ось. Однако маятник поднимается теперь на меньшую высоту, так как часть его энергии израсходовалась на преодоление сопротивления воздуха и трения нитей об ось. Совершив ряд колебаний с убывающей амплитудой, маятник останавливается в положении равновесия.

Потеря энергии происходит и при колебаниях под действием упругих сил, так как вполне упругих тел не существует, а деформации не вполне упругих тел сопровождаются частичным переходом механической энергии в энергию хаотического теплового движения частиц этих тел. В случае электрических колебаний часть электрической энергии в форме теплоты также переходит в энергию теплового движения частиц проводника и окружающего воздуха.

2. Во многих случаях, когда отсутствует сухое трение (см. § 5.3), в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях движения силы, вызывающие затухание механических колебаний, пропорциональны величине скорости Будем называть эти силы, независимо от их происхождения, **силами трения**, или **сопротивления:**

$$\mathbf{F}_{тр} = -r\mathbf{v},$$

где r — коэффициент сопротивления, а $\mathbf{v}$ — скорость движения. Знак минус указывает, что силы трения всегда направлены в сторону, противоположную направлению движения.

Напишем второй закон Ньютона для затухающих прямолинейных колебаний тела вдоль оси OX:

$$ma_x = -kx - rv_x, \qquad (8\ 26)$$

где m — масса колеблющегося тела, v_x и a_x — проекции его скорости и ускорения на ось OX, а $-kx$ и $-rv_x$ — проекции на ось OX возвращающей силы и силы трения.

Заменив $v_x = \frac{dx}{dt}$ и $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ и перенеся все члены в левую часть уравнения, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (8\ 27)$$

Массу m, коэффициент сопротивления r и коэффициент упругости k иногда называют **параметрами колеблющейся системы.**

Если $r/2m \leqslant \sqrt{k/m}$, то в результате решения дифференциального уравнения (8.27) получается следующая зависимость смещения от времени (вывод этой формулы нами опущен):

$$x = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (8.28)$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Выражение

$$A = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \qquad (8.29)$$

называют **амплитудой затухающих колебаний.**

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент сопротивления и чем меньше масса m колеблющегося тела, т. е. чем меньше инертность системы.

Величину

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (r/2m)^2} \tag{8.30}$$

называют **собственной циклической частотой** колебаний диссипативной системы ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — циклическая частота свободных незатухающих колебаний рассматриваемой системы в отсутствие сил трения).

3. Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них никогда не повторяются, например, максимальные значения смещения, скорости и ускорения. Поэтому называть величину ω циклической частотой затухающих колебаний можно лишь условно в том смысле, что она показывает, сколько раз за π с колеблющаяся система проходит через положение равновесия. По тем же причинам величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - (r/2m)^2}}, \tag{8.30'}$$

обычно называемую **периодом затухающих колебаний,** правильнее называют **условным периодом затухающих колебаний.**

Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени t и $t + T$, где T — условный период колебаний:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\frac{r}{2m}t}}{A_0 e^{-\frac{r}{2m}(t+T)}} = e^{\frac{r}{2m}T}, \tag{8.31}$$

или

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\beta T},$$

где

$$\beta = \frac{r}{2m} \tag{8.32}$$

называют **коэффициентом затухания.**

Натуральный логарифм отношения амплитуд смещений, следующих друг за другом через промежуток времени T, называют **логарифмическим декрементом затухания** δ:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta T. \tag{8.33}$$

Поясним физический смысл величин β и δ. Обозначим через τ

промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Тогда

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e,$$

откуда $\beta\tau = 1$, или

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

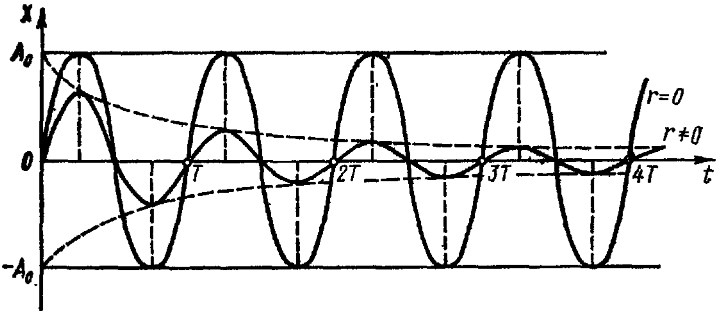

Рис. 8.16.

Следовательно, коэффициент затухания β есть физическая величина, обратная промежутку времени τ, в течение которого амплитуда убывает в e раз. Величину τ называют **временем релаксации.** Пусть, например, $\beta = 10^2\ с^{-1}$ — это означает, что амплитуда колебаний убывает в e раз за 10^{-2} с. Пусть N — число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в e раз. Тогда

$$\tau = NT,$$

$$\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания δ есть физическая величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда убывает в e раз. Пусть, например, $\delta = 0{,}01$. Это значит, что амплитуда колебаний убывает в e раз по истечении 100 колебаний.

4. Если затухание колебаний не очень велико, то оно почти совсем не сказывается на величине условного периода (рис. 8.16). При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным критическому, т. е.

$$r = r_к = 2m\omega_0 \quad или \quad \beta = \omega_0,$$

то, как видно из уравнения (8.30), циклическая частота затухающих колебаний обращается в нуль. Следовательно, колебания прекращаются: система, выведенная какими-либо внешними силами из положения равновесия, после прекращения действия этих сил возвращается в положение равновесия апериодически (рис. 8.17). Отличие колебательного движения от апериодического состоит в следующем. При колебательном движении система, возвращаясь в положение равновесия, имеет некоторый запас кинетической энергии. В случае апериодического движения вся механическая энергия колеблющейся системы к моменту ее возвращения в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление трения. При очень большом трении апериодическое движение будет происходить весьма медленно.

Рис. 8.17.

§ 8.6. Вынужденные колебания

1. Рассмотрим колебания, которые совершает система, если на нее, кроме упругой силы $-k\mathbf{x}$ и сил сопротивления $-r\mathbf{v}$ действует еще добавочная периодическая сила $\mathbf{F}$, которую мы будем

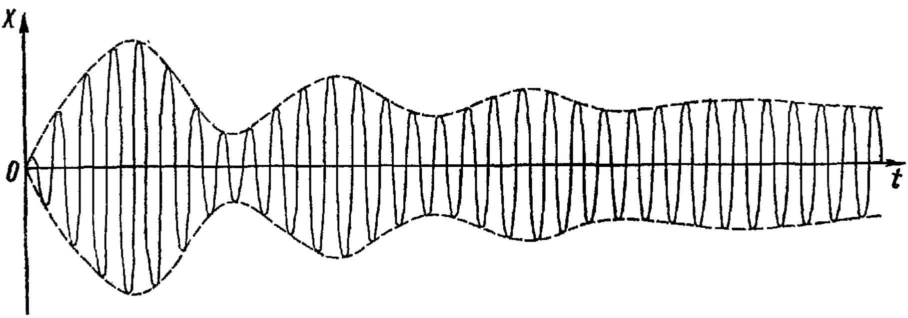

Рис. 8.18.

называть **вынуждающей,** или **возмущающей, силой.** Такие колебания совершает, например, груз, подвешенный на пружине и подталкиваемый вверх через равные промежутки времени. Если период вынуждающей силы не равен периоду свободных колебаний системы, то вначале происходит несколько биений, а затем устанавливаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой (рис. 8.18). Биения, происходящие вначале, являются результатом наложения вынужденных колебаний и свободных затухающих колебаний.

2. Из второго закона Ньютона следует, что для вынужденных п р я м о л и н е й н ы х колебаний тела массы m, совершающихся вдоль оси OX,

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x.$$