щаются: система, выведенная какими-либо внешними силами из положения равновесия, после прекращения действия этих сил возвращается в положение равновесия апериодически (рис. 8.17). Отличие колебательного движения от апериодического состоит в следующем. При колебательном движении система, возвращаясь в положение равновесия, имеет некоторый запас кинетической энергии. В случае апериодического движения вся механическая энергия колеблющейся системы к моменту ее возвращения в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление трения. При очень большом трении апериодическое движение будет происходить весьма медленно.

Рис. 8.17.

§ 8.6. Вынужденные колебания

1. Рассмотрим колебания, которые совершает система, если на нее, кроме упругой силы $-k\mathbf{x}$ и сил сопротивления $-r\mathbf{v}$ действует еще добавочная периодическая сила $\mathbf{F}$, которую мы будем

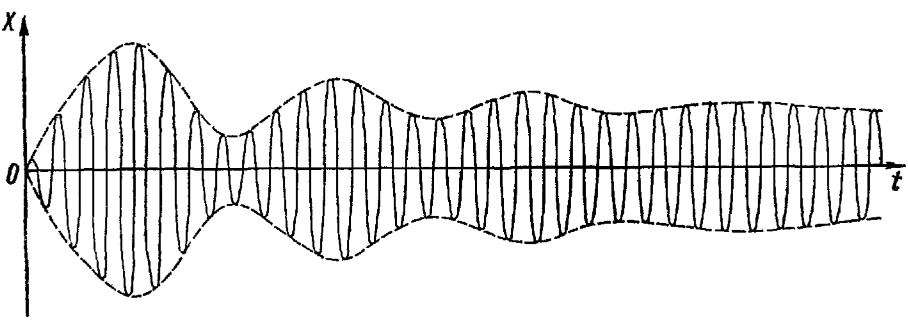

Рис. 8.18.

называть **вынуждающей**, или **возмущающей, силой**. Такие колебания совершает, например, груз, подвешенный на пружине и подталкиваемый вверх через равные промежутки времени. Если период вынуждающей силы не равен периоду свободных колебаний системы, то вначале происходит несколько биений, а затем устанавливаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой (рис. 8.18). Биения, происходящие вначале, являются результатом наложения вынужденных колебаний и свободных затухающих колебаний.

2. Из второго закона Ньютона следует, что для вынужденных прямолинейных колебаний тела массы m, совершающихся вдоль оси OX,

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x.$$

где F_x — проекция на ось OX периодически действующей вынуждающей силы $\mathbf{F}$. Заменяя проекции скорости и ускорения производными от смещения по времени и перенося члены с переменной x влево, получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=F_x. \quad (8.34)$$

Рассмотрим простейший случай, когда вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону:

$$F_x=F_0\cos\omega t. \quad (8.35)$$

Предположим, что возникающие под действием силы $\mathbf{F}$ установившиеся вынужденные колебания системы также являются гармоническими:

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0), \quad (8.36)$$

причем их циклическая частота равна циклической частоте ω вынуждающей силы.

Задача заключается в нахождении амплитуды A и начальной фазы φ_0. Если нам удастся выразить их через массу m системы, коэффициенты k и r, а также амплитуду F_0 и циклическую частоту ω вынуждающей силы так, чтобы выражение (8.36) обращало в тождество уравнение (8.34), то тем самым мы докажем справедливость сделанного выше предположения

Из (8.36) имеем:

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0),\\ a_x&=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)=A\omega^2\cos\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)\\ x&=A\cos\left(\omega t+\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}\right\} \quad (8.37)$$

Подставив эти выражения в уравнение (8.34), получим

$$mA\omega^2\cos\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)+rA\omega\cos(\omega t+\varphi_0)+$$
$$+kA\cos\left(\omega t+\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)=F_0\cos\omega t.$$

Разделим все члены равенства на mA:

$$\omega^2\cos\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{r}{m}\omega\cos(\omega t+\varphi_0)+$$
$$+\frac{k}{m}\cos\left(\omega t+\varphi_0-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{F_0}{mA}\cos\omega t. \quad (8.38)$$

Выше было показано, что $\frac{k}{m}=\omega_0^2$, где ω_0 — циклическая частота свободных незатухающих колебаний системы, $\frac{r}{m} = 2\beta$, где β — коэффициент затухания. Следовательно, равенство (8.38) можно записать и так:

$$A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_0) + $$
$$+ A_3 \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = A_4 \cos \omega t, \qquad (8.38')$$

где

$$A_1 = \omega^2; \quad A_2 = 2\beta\omega; \quad A_3 = \omega_0^2 \quad \text{и} \quad A_4 = \frac{F_0}{mA}. \qquad (8.39)$$

Правую часть выражения (8.38′) можно рассматривать как уравнение некоторого гармонического колебания, получившегося от сложения трех гармонических колебаний, определяемых членами левой части этого равенства. Для сложения этих колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм. Проведем опорную линию OX (рис. 8.19) и отложим под углами, соответствующими начальным фазам всех четырех колебаний, векторы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$ их амплитуд таким образом, чтобы $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$. Из рис. 8.19 видно, что

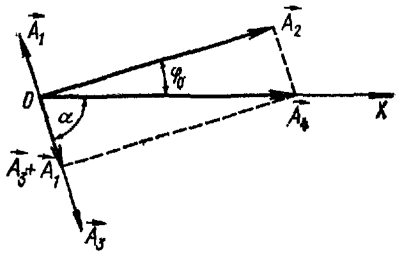

Рис. 8.19.

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2,$$

откуда, на основании соотношений (8.39), следует, что

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (8.40)$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0, обратно пропорциональна массе m системы и уменьшается с увеличением коэффициента затухания β. При постоянных F_0, m и β амплитуда зависит только от соотношения циклических частот вынуждающей силы (ω) и свободных незатухающих колебаний системы (ω_0). Рис. 8.19 позволяет определить сдвиг фаз φ_0 между скоростью установившихся вынужденных колебаний и вынуждающей силой, а также сдвиг фаз $\alpha = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ между смещением и вынуждающей силой:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}. \qquad (8.41)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (8.42)$$

3. Исследуем выражение (8.40) и построим кривую зависимости амплитуды вынужденных колебаний от циклической частоты вынуждающей силы (рис. 8.20).

а) При циклической частоте вынуждающей силы $\omega = 0$

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

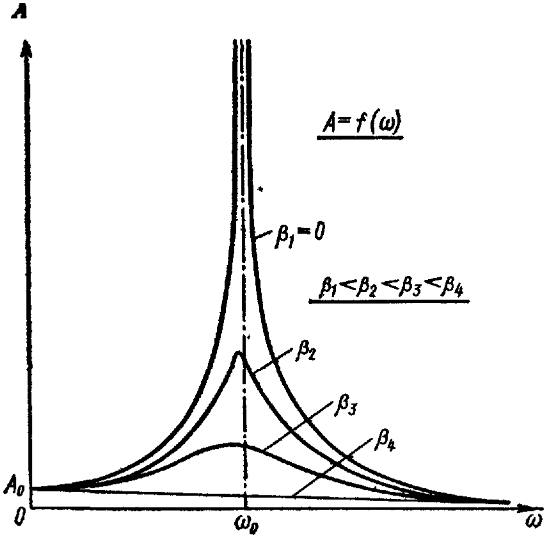

Рис. 8.20.

В этом случае колебания не совершаются и смещение при вынужденных колебаниях равно статической деформации под действием постоянной силы F_0:

$$x = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

Поэтому отклонение A_0 иногда называют **статической амплитудой.**

б) Если затухания нет $\left(\beta_1 = \frac{r}{2m} = 0\right)$, то амплитуда колебаний A растет с увеличением циклической частоты ω вынуждающей силы F и при $\omega = \omega_0$ становится бесконечно большой.

При дальнейшем росте циклической частоты ω амплитуда A вынужденных колебаний уменьшается, причем $\lim\limits_{\omega\to\infty} A = 0$.

в) Если затухание существует $(\beta \neq 0)$, то амплитуда достигает максимального значения, когда знаменатель правой части уравнения

(8.40) достигает минимума. Приравнивая нулю первую производную по ω от подкоренного выражения, получим условие его минимума:

$$-4\left(\omega_0^2-\omega_{рез}^2\right)\omega_{рез}+8\beta^2\omega_{рез}=0,$$

где $\omega_{рез}$ обозначает то значение циклической частоты ω вынуждающей силы, при котором $A=A_{макс}$.

Преобразуя это выражение, получим

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\omega_0\sqrt{1-2\beta^2/\omega_0^2}. \qquad (8.43)$$

Циклическую частоту $\omega_{рез}$ называют **резонансной**, а явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $\omega_{рез}$ называют **явлением резонанса**. Из формулы (8.43) следует, что для консервативной системы ($\beta=0$) $\omega_{рез}=\omega_0$, а для диссипативной системы $\omega_{рез}$ несколько меньше собственной циклической частоты $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$. С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее (рис. *8.20*) и, наконец, исчезает при

$$\beta\geqslant\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Явление резонанса широко используется в радиотехнике (например, для настройки радиоприемников на прием той или иной радиостанции), в акустике (для анализа звуков, их усиления и т. д.). Ряд оптических явлений, например аномальная дисперсия, связаны с резонансом.

В различных сооружениях и машинах, подвергающихся периодически изменяющимся нагрузкам, резонанс весьма опасен. Он может вызвать их разрушение вследствие значительного возрастания амплитуды колебаний. Так, например, шатуны двигателя внутреннего сгорания действуют на коленчатый вал с периодически изменяющимися силами. Период их изменения связан с угловой скоростью вращения вала. Эти силы вызывают колебания коленчатого вала и при скорости вращения, соответствующей резонансу, могут привести к поломке вала. Вращающиеся части машин, диски и валы турбин, винты самолетов не могут быть абсолютно точно уравновешены, т. е. их центры масс всегда слегка смещены по отношению к осям вращения. Следовательно, они также испытывают переменную нагрузку и совершают вынужденные колебания. При проектировании современных машин и других сооружений, подвергающихся переменным нагрузкам, производят специальные расчеты и принимают меры для исключения возможности возникновения резонанса.

Вопросы для повторения

1. Какие колебания называют гармоническими? Дайте определения их основных характеристик (амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты).