Глава XV

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

§ 15.1. Закон Био—Савара—Лапласа

1. После опытов Г. Эрстеда началось интенсивное изучение магнитного поля постоянного электрического тока. В 1820 г. французские ученые Ж. Био и Ф. Савар исследовали магнитные поля, создаваемые в воздухе прямолинейным током, круговым током, катушкой с током и т. д. На основании многочисленных опытов они пришли к следующим выводам:

а) во всех случаях индукция магнитного поля электрического тока пропорциональна силе тока;

б) магнитная индукция зависит от формы и размеров проводника с током;

в) магнитная индукция в произвольной точке поля зависит от расположения этой точки по отношению к проводнику с током.

Так, например, в случае длинного прямолинейного проводника с током I магнитная индукция пропорциональна отношению I/r, где r — расстояние от рассматриваемой точки поля до проводника. Магнитная индукция в центре кругового витка радиуса R с током I оказалась пропорциональной I/R.

2. Био и Савар пытались получить общий закон, который позволял бы вычислять магнитную индукцию в каждой точке поля, создаваемого током, текущим по проводнику любой формы. Однако сделать это им не удалось. По их просьбе этой задачей занялся выдающийся французский математик, астроном и физик П. Лаплас. Он учел векторный характер магнитной индукции и высказал важную гипотезу о том, что индукция $\mathbf{B}$ в каждой точке магнитного поля любого проводника с током представляет собой векторную сумму индукций $d\mathbf{B}$ элементарных магнитных полей, создаваемых каждым участком $d\mathbf{l}$ этого проводника. Тем самым Лаплас предположил, что при наложении магнитных полей справедлив принцип суперпозиции, т.е. принцип независимого действия полей, с которым мы уже имели дело в электростатике (см. § 2.2).

Лаплас обобщил результаты экспериментов Био и Савара в виде следующего дифференциального закона, называемого **законом Био—Савара—Лапласа**

$$d\mathbf{B} = \kappa_1 \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l}\, \mathbf{r}], \tag{15.1}$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор, численно равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из элемента проводника dl в рассматриваемую точку поля, $r = |\mathbf{r}|$, κ_1 — коэффициент пропорциональности, определяемый опытным путем.

Из закона Био—Савара—Лапласа следует, что вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ в какой-либо точке C магнитного поля перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$, и его направление таково, что из конца вектора $d\mathbf{B}$ поворот вектора $d\mathbf{l}$ до совмещения с вектором $\mathbf{r}$ по кратчайшему пути виден происходящим против часовой стрелки (рис. 15.1). Такое же направление вектора $d\mathbf{B}$ дает правило буравчика, изложенное в § 14.1.

3. Дальнейшие экспериментальные исследования показали, что при одинаковых силе тока, форме и размерах проводника магнитная индукция зависит от свойств среды, в которой создается магнитное поле. Следовательно, коэффициент κ_1 в законе Био—Савара—Лапласа (15.1) должен зависеть не только от выбора единиц величин, входящих в это уравнение, но и от свойств среды. Если среда однородна и изотропна, то κ_1 можно представить в виде

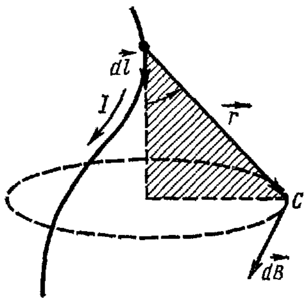

Рис. 15.1

$$\kappa_1 = \kappa_2\mu, \qquad (15.2)$$

где κ_2— коэффициент, зависящий только от выбора системы единиц, μ — безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства среды и называемая **относительной магнитной проницаемостью среды**. Она не зависит от выбора системы единиц и равна единице для вакуума. У всех сред, кроме ферромагнитных, значения μ очень мало отличаются от единицы (см. гл. XX).

Таким образом, закон Био—Савара—Лапласа (15.1) можно переписать в форме

$$d\mathbf{B} = \kappa_2\mu \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l}\ \mathbf{r}]. \qquad (15.3)$$

В Международной системе единиц (СИ) принимается, что

$$\kappa_2 = \mu_0/4\pi. \qquad (15.4)$$

где μ_0 — так называемая **магнитная постоянная**. Поэтому

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l}\ \mathbf{r}]. \qquad (15.5)$$

Такая форма записи закона Био—Савара — Лапласа и всех вытекающих из него уравнений электромагнитного поля называется **рационализованной**. Во всем дальнейшем изложении мы будем пользоваться только ею. Произведение $\mu\mu_0$ часто называют **абсолютной магнитной проницаемостью** среды.

Если учесть, что модуль векторного произведения $[d\mathbf{l}\ \mathbf{r}]$ равен

$$|\,[d\mathbf{l}\,\mathbf{r}]\,| = r\,dl \cdot \sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{r}}),$$

то числовое значение вектора $d\mathbf{B}$ равно

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{r}})}{r^2}. \tag{15.6}$$

Значения коэффициента k_2 в других системах единиц рассмотрены в § 15.3.

4. Наряду с магнитной индукцией **B** вводится другая векторная характеристика магнитного поля — **напряженность H**. Для магнитного поля в изотропной среде связь между векторами **B** и **H** имеет вид[1]

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0} \tag{15.7}$$

Из (15.5) следует, что в безграничной однородной и изотропной среде напряженность магнитного поля электрического тока не зависит от свойств среды:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\mathbf{l}\,\mathbf{r}], \tag{15.8}$$

$$dH = \frac{Idl \sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{r}})}{4\pi r^2}. \tag{15.9}$$

Формулы (15.8) и (15.9) представляют собой часто употребляемый вид записи закона Био—Савара—Лапласа.

Сравнение векторных характеристик электрического (**E** и **D**) и магнитного (**B** и **H**) полей показывает, что аналогом вектора напряженности **E** электрического поля является вектор магнитной индукции **B**, так как **E** и **B** определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды, в которой создаются поля. В свою очередь аналог вектора электрического смещения **D** — вектор напряженности **H** магнитного поля.

5. Закон Био—Савара—Лапласа позволяет найти напряженность **H** и индукцию **B** магнитного поля электрического тока, текущего по проводнику конечных размеров и произвольной формы. В соответствии с принципом суперпозиции магнитная индукция **B** в любой точке магнитного поля проводника с током I равна векторной сумме индукций $\Delta\mathbf{B}_i$ элементарных магнитных полей, создаваемых всеми отдельными участками Δl_i этого проводника:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\mathbf{B}_i, \tag{15.10}$$

где n — общее число участков, на которые он разбит.

Неограниченно увеличивая число участков n и переходя к пределу при $n \to \infty$, можно заменить сумму, стоящую в правой части уравнения (15.10), интегралом:

$$\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B}, \tag{15.11}$$

[1] Универсальную связь между векторами **B** и **H** для магнитного поля в произвольной среде мы рассмотрим в § 20.5.

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника с током I, а символ «l» означает, что интегрирование распространено на всю его длину l.

В следующих параграфах будут даны примеры расчета магнитных полей тока, текущего по проводникам правильной геометрической формы.

§ 15.2. Магнитное поле прямолинейного проводника с током

1. Часть замкнутой электрической цепи — прямолинейный проводник MN — лежит в плоскости чертежа (рис. 15.2). Согласно закону Био—Савара—Лапласа (15.6), вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ поля, создаваемого в точке A элементом dl проводника с током I, численно равен

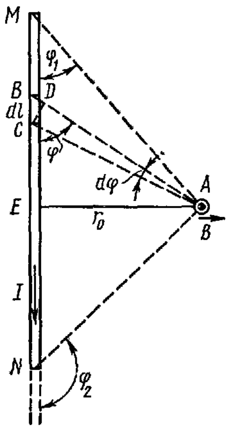

Рис. 15.2

$$dB = \mu\mu_0 I dl \sin\varphi / 4\pi r^2,$$

где φ — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$. Векторы $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ для всех участков прямолинейного проводника лежат в плоскости чертежа. Поэтому в точке A все векторы $d\mathbf{B}$, характеризующие магнитные поля, создаваемые отдельными участками нашего проводника, направлены перпендикулярно плоскости чертежа («к нам»). Это сильно упрощает определение индукции $\mathbf{B}$ результирующего магнитного поля; вектор $\mathbf{B}$ также перпендикулярен плоскости чертежа и численно равен алгебраической сумме модулей векторов $d\mathbf{B}$:

$$B = \int\limits_l dB = \int\limits_l \frac{\mu\mu_0 I dl \sin\varphi}{4\pi r^2}.$$

Учитывая, что величины μ, μ_0 и I при интегрировании не изменяются, получаем

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_l \frac{dl \sin\varphi}{r^2}. \tag{15.12}$$

Чтобы произвести интегрирование, выразим dl и r через одну независимую переменную φ. Проведем из точки A дугу CD окружности, радиус которой вследствие малости длины dl участка BC проводника можно считать равным r. По этой же причине угол при вершине D треугольника BCD можно считать прямым. Обозначим через r_0 длину перпендикуляра AE, опущенного из точки A на проводник. Как видно из чертежа, $r = r_0/\sin\varphi$ и $dl = CD/\sin\varphi$. В то же время $CD = r d\varphi$, поэтому $dl = \frac{r d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{\sin^2\varphi}$. Подставив r и dl в (15.2),