

Глава XVI

ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

§ 16.1. Закон полного тока

1. В § 3.1 было показано, что циркуляция напряженности \mathbf{E} электростатического поля вдоль любого замкнутого контура L равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (16.1)$$

Это соотношение свидетельствует о том, что электростатическое поле является потенциальным.

2. Магнитное поле в отличие от электростатического — непотенциальное поле: циркуляция вектора \mathbf{B} магнитной индукции поля вдоль замкнутого контура, вообще говоря, не равна нулю и зависит от выбора контура. Такое поле в векторном анализе называют **вихревым полем**.

Рассмотрим в качестве примера магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника с током I , находящегося в вакууме (рис. 16.1). Линии магнитной индукции этого поля представляют собой окружности, плоскости которых перпендикулярны проводнику, а центры лежат на его оси. На рис. 16.1 эти линии изображены пунктиром. Найдем циркуляцию вектора \mathbf{B} вдоль произвольной линии магнитной индукции — окружности радиуса r :

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}). \quad (16.2)$$

Во всех точках линии индукции вектор \mathbf{B} численно равен

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} \quad (16.3)$$

и направлен по касательной к этой линии, так что $\cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = 1$. Следовательно,

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I. \quad (16.4)$$

Из (16.4) можно сделать два вывода:

а) магнитное поле прямолинейного тока — вихревое поле, так как в нем циркуляция вектора \mathbf{B} вдоль линии магнитной индукции не равна нулю;

б) циркуляция вектора \mathbf{B} магнитной индукции поля прямолинейного тока в вакууме одинакова вдоль всех линий магнитной индукции и равна произведению магнитной постоянной на силу тока.

3. Покажем, что формула (16.4) справедлива для замкнутого контура L произвольной формы, охватывающего бесконечно длинный прямолинейный проводник с током I (рис. 16.2). В точке A

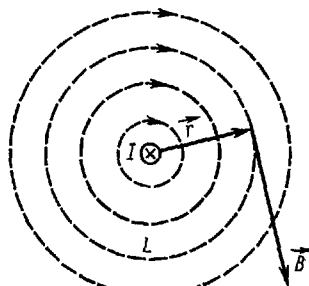


Рис 16.1

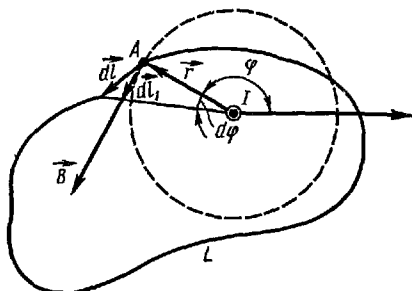


Рис 16.2

контура L вектор \mathbf{B} магнитной индукции поля этого тока перпендикулярен радиусу-вектору \mathbf{r} . Из рис. 16.2 видно, что

$$Bdl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = Bdl_1, \quad (16.5)$$

где $dl_1 = dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}})$ — длина проекции вектора $d\mathbf{l}$ на направление вектора \mathbf{B} . В то же время малый отрезок dl_1 касательной к окружности радиуса r можно заменить дугой окружности: $dl_1 = r d\varphi$, где $d\varphi$ — центральный угол, под которым виден элемент $d\mathbf{l}$ контура L из центра окружности. Подставляя это значение dl_1 в (16.5) и заменяя B по формуле (16.3), получаем

$$Bdl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi \quad (16.6)$$

Интегрируя вдоль всего замкнутого контура L и учитывая, что при этом угол φ изменяется от нуля до 2π , находим

$$\oint Bdl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad \text{или} \quad \oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Таким образом, нами доказано, что формула (16.4) справедлива для любого замкнутого контура, охватывающего проводник, независимо от формы этого контура.

4. В предыдущих выводах предполагалось, что направление обхода контура L при вычислении циркуляции вектора \mathbf{B} согласовано с направлением тока в проводнике по правилу буравчика. Это значит, что для наблюдателя, смотрящего навстречу вектору \mathbf{j} плотности тока в проводнике, обход контура L виден происходящим против часовой стрелки (рис. 16.2). При противоположном направлении обхода контура вместо (16.4) получается

$$\oint_L \mathbf{B} dl = -\mu_0 I. \quad (16.4')$$

Если в этом случае ток I считать отрицательным, то формула (16.4') эквивалентна (16.4). Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться только формулой (16.4), полагая в ней $I > 0$, если направление тока в проводнике соответствует (по правилу буравчика) направлению обхода контура, и считая $I < 0$ в противном случае.

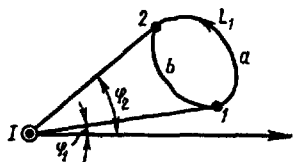


Рис. 16.3

5. Предположим теперь, что замкнутый контур L_1 не охватывает проводника с током (рис. 16.3). Тогда

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} dl = \int_{1a2} \mathbf{B} dl + \int_{2b1} \mathbf{B} dl,$$

где $1a2$ и $2b1$ — участки контура L_1 . Заменяя подынтегральные выражения по формуле (16.6), получим

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \right) = 0. \quad (16.7)$$

Итак, циркуляция вектора магнитной индукции поля прямолинейного проводника с током вдоль замкнутого контура, не охватывающего этого проводника, равна нулю.

6. Можно доказать, что соотношения (16.4) и (16.7) для магнитного поля в вакууме универсальны. Они справедливы для магнитного поля проводника с током любой формы и любых размеров, а не только для поля бесконечного прямолинейного проводника с током

В общем случае магнитное поле может создавать целая система из n' проводников с током $I_1, I_2, \dots, I_{n'}$. Обозначим \mathbf{B}_i индукцию магнитного поля в вакууме одного i -го проводника с током I_i . Индукция результирующего магнитного поля согласно принципу суперпозиции

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n'} \mathbf{B}_i.$$

Циркуляция вектора \mathbf{B} вдоль произвольного замкнутого контура L , проведенного в поле, равна

$$\oint_L \mathbf{B} dl = \oint_L \left(\sum_{i=1}^{n'} \mathbf{B}_i \right) dl = \oint_L \sum_{i=1}^{n'} (\mathbf{B}_i dl) = \sum_{i=1}^{n'} \oint_L \mathbf{B}_i dl.$$

В соответствии с (16.4) и (16.7) получим

$$\oint_L \mathbf{B}_i dl = \begin{cases} \mu_0 I_i, & \text{если контур } L \text{ охватывает ток } I_i, \\ 0, & \text{если контур } L \text{ не охватывает тока } I_i. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (16.8)$$

где n — число проводников с током, охватываемых контуром L ($n \leq n'$), а индекс суммирования i заменен на k для того, чтобы подчеркнуть, что в сумму, стоящую в (16.8), входят только те токи, которые охватываются контуром L . Уравнение (16.8) является математическим выражением закона полного тока для магнитного поля в вакууме: циркуляция вдоль замкнутого контура вектора индукции магнитного поля в вакууме равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.

7. Так как напряженность \mathbf{H} магнитного поля в вакууме связана с магнитной индукцией \mathbf{B} соотношением $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, то с учетом (16.8) закон полного тока можно также записать в форме

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (16.9)$$

В гл. XX показано, что закон полного тока в виде (16.9) справедлив для магнитного поля не только в вакууме, но и в произвольной среде.

Алгебраическая сумма токов I_k , охватываемых замкнутым контуром L , есть не что иное, как результирующая сила тока проводимости сквозь поверхность S , натянутую на контур L . Поэтому, используя формулу (8.4), можно написать:

$$\sum_{k=1}^n I_k = \int_S \mathbf{j} dS,$$

где \mathbf{j} — плотность тока проводимости в пределах малого элемента dS поверхности, натянутой на контур L . Подставив это выражение в (16.9), получим

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{j} dS. \quad (16.9')$$

8. Закон полного тока (16.9) имеет такое же важное значение для расчета магнитных полей постоянного электрического тока, как и теорема Остроградского—Гаусса для расчета электростатических полей.

В качестве примера применим закон полного тока к расчету магнитного поля тороида. Тороидом называется кольцевая катушка, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 16.4). На рис. 16.5 показано сечение тороида плоскостью, проходящей через его осевую линию $ABCA$. Обозначим через R_1 и R_2 соответственно внешний и внутренний радиусы сечения тороида (размерами поперечного сечения провода, из которого сделана обмотка, пренебрегаем). Из условия симметрии следует, что линии индукции магнитного поля тороида должны иметь форму окружностей, центры которых лежат на прямой, проходящей через центр тороида O и перпендикулярной плос-

кости чертежа¹. Очевидно также, что во всех точках одной и той же силовой линии числовые значения напряженности H магнитного по-

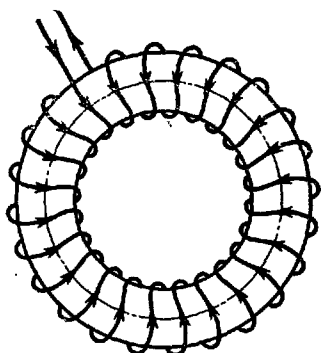


Рис. 16.4

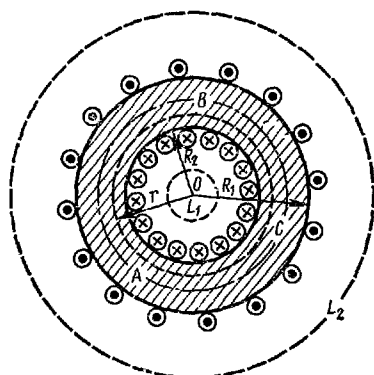


Рис. 16.5

ля должны быть одинаковыми. Поэтому циркуляция вектора \mathbf{H} вдоль окружности радиуса r равна

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = H \int_0^{2\pi} dl = 2\pi Hr. \quad (16.10)$$

Пусть обмотка тороида имеет N витков, а ток в ней I . Если $r < R_2$, то окружность L_1 радиуса r не охватывает проводников с током, так что $\sum_{k=1}^n I_k = 0$ и, по закону полного тока (16.9),

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = 2\pi Hr = 0, \text{ т. е. } H = 0.$$

Если $r > R_1$, то окружность L_2 радиуса r охватывает $2N$ проводников с током I . Однако, как видно из рис. 16.5, в N из них ток I идет в одном направлении, а в остальных N проводниках — в обратном направлении. Поэтому алгебраическая сумма токов во всех проводниках равна нулю, а из закона полного тока (16.9) следует:

$$2\pi Hr = 0, \text{ или } H = 0.$$

Следовательно, вне тороида магнитного поля нет. Оно целиком локализовано внутри объема тороида ($R_2 < r < R_1$). Окружность радиуса r , лежащая внутри тороида, охватывает N проводников, токи в которых равны I и одинаково направлены. Поэтому

¹ Это верно только в случае идеального тороида, обмотка которого состоит из бесконечно большого числа витков исчезающе тонкой проволоки, вплотную прилегающих друг к другу.

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^n I_k = NI. \quad (16.11)$$

Из формул (16.10) и (16.11) следует, что напряженность магнитного поля внутри тороида

$$H = NI/2\pi r. \quad (16.12)$$

Таким образом, напряженность поля внутри тороида уменьшается по мере удаления от его центра O :

$$H_{\text{макс}} = \frac{NI}{2\pi R_2} \quad \text{и} \quad H_{\text{мин}} = \frac{NI}{2\pi R_1} = \frac{NI}{2\pi(R_2 + d)}.$$

Здесь d — диаметр витков обмотки.

Напряженность магнитного поля на осевой линии тороида $|r = R_{\text{ср}} = (R_1 + R_2)/2|$ равна

$$H_{\text{ср}} = \frac{NI}{2\pi R_{\text{ср}}} = nl,$$

где n — число витков на единицу длины средней линии тороида.

Если неограниченно увеличивать средний радиус тороида, сохраняя неизменными диаметр d и плотность n витков его обмотки, то неоднородность поля внутри тороида будет уменьшаться. В пределе вместо тороида получим бесконечно длинный соленоид. Поле внутри такого соленоида однородно, так как векторы \mathbf{H} направлены параллельно оси соленоида и численно равны друг другу.

Магнитная индукция внутри тороида численно равна

$$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 NI/2\pi r, \quad (16.12')$$

где μ — относительная магнитная проницаемость сердечника тороида.

§ 16.2. Магнитный поток

1. **Потоком вектора магнитной индукции или магнитным потоком** сквозь малую площадку dS называется физическая величина, равная произведению этой площадки и проекции B_n вектора \mathbf{B} на направление нормали \mathbf{n} к площадке dS :

$$d\Phi_m = B_n dS = B dS \cos(\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{n}}) = B dS, \quad (16.13)$$

где $dS = ndS$ — вектор площадки dS . Интегрируя это выражение по S , получим

$$\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S B dS, \quad (16.14)$$

где Φ_m — магнитный поток сквозь произвольную поверхность S .

При вычислении этого интеграла векторы \mathbf{n} нормалей к площадкам dS нужно направлять в одну и ту же сторону по отношению к по-