

поля прямолинейного тока представляют собой concentricкие окружности, центры которых лежат на оси проводника, а плоскости перпендикулярны ему. Поэтому линии индукции не пересекают ни боковой поверхности цилиндра, ни его оснований. Следовательно, в любой точке поверхности цилиндра проекция вектора \mathbf{B} на направление нормали \mathbf{n} к поверхности равна нулю ($B_n = 0$) и

$$\oint_S B_n dS = 0.$$

§ 16.3. Законы магнитных цепей

1. В § 16.1 было показано, что магнитное поле тороида полностью заключено внутри его сердечника. Таким же свойством обладает магнитное поле бесконечно длинного соленоида. Совокупность областей пространства, в которых локализовано магнитное поле, называют **магнитной цепью**. Таким образом, внутренние полости тороида и бесконечно длинного соленоида представляют собой простейшие магнитные цепи. Для усиления магнитного поля применяют магнитные

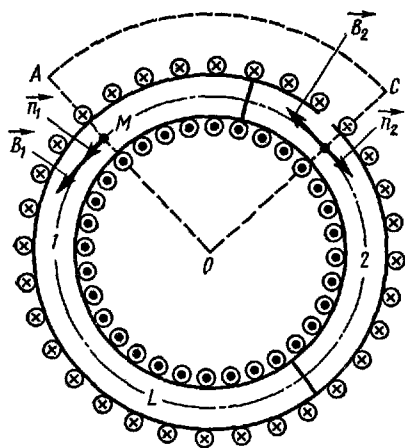


Рис. 16.7

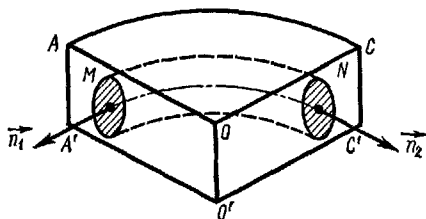


Рис. 16.8

цепи, изготовленные из материалов с большими значениями относительной магнитной проницаемости μ . Чаще всего используют железо. Источником возникновения магнитного поля в такой цепи является электрический ток в соленоидальных катушках, намотанных на всю цепь или на отдельные ее участки. Расчет магнитных цепей, составляющих необходимую часть всех электрических машин и большого числа электрических устройств (трансформаторов, электромагнитов и др.), представляет большой практический интерес.

Расчет магнитных цепей основывается на законе полного тока (16.9) и теореме Остроградского—Гаусса для магнитного поля (16.15), с помощью которых удается получить сравнительно простые соотношения, называемые **законами магнитных цепей**.

2. В качестве примера рассчитаем магнитное поле тороида, изображенного на рис. 16.7. Сердечник тороида с площадью поперечного

сечения состоит из двух частей 1 и 2, изготовленных из веществ с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Для упрощения расчетов предположим, что радиус сечения S мал по сравнению с размером тороида, поэтому в пределах площадки S магнитное поле можно считать однородным. В противном случае сердечник пришлось бы разбить на отдельные кольца с достаточно малыми поперечными сечениями. Линии магнитной индукции в сердечнике представляют собой концентрические окружности, центры которых лежат на оси симметрии O тороида.

Проведем через ось O радиальные плоскости OA и OC , разрезающие тороид на две части (рис. 16.7). Построим цилиндрический сектор $AOC C'O'A'A$ (рис. 16.8), длину OO' которого вдоль оси симметрии тороида выберем так, чтобы часть тороида MN находилась внутри объема сектора. Пусть S' — поверхность цилиндрического сектора, тогда по теореме Остроградского—Гаусса (16.15) магнитный поток сквозь эту поверхность равен нулю:

$$\oint_{S'} B_n dS = 0. \quad (16.16)$$

Магнитное поле тороида локализовано внутри его сердечника. Поэтому во всех точках боковой поверхности $ACC'A'A$ и оснований AOC и $A'O'C'$ цилиндрического сектора индукция B магнитного поля равна нулю. Следовательно, и магнитный поток сквозь эти поверхности равен нулю.

По тем же соображениям магнитные потоки сквозь плоские поверхности $AOO'A'A$ и $COO'C'C$ равны потокам Φ_{m1} и Φ_{m2} соответственно сквозь сечения S_1 и S_2 сердечника тороида в точках M и N :

$$\Phi_{m1} = \int_{S_1} B_n dS, \quad \Phi_{m2} = \int_{S_2} B_n dS. \quad (16.17)$$

На основании сказанного уравнение (16.16) можно записать в форме

$$\Phi_{m1} + \Phi_{m2} = 0, \quad \text{или} \quad \Phi_{m1} = -\Phi_{m2}. \quad (16.18)$$

Из уравнения (16.18) следует, что абсолютное значение магнитного потока во всех сечениях магнитной цепи тороида одинаково. Как известно, сила тока в любом сечении неразветвленной цепи также одинакова. Поэтому, проводя аналогию между магнитной и электрической цепями, можно сказать, что магнитный поток играет в магнитной цепи такую же роль, какую в электрической цепи играет сила тока.

3. Вычислим интегралы, стоящие в формулах (16.17). Внешняя нормаль \mathbf{n}_1 (см. рис. 16.7) к плоскому сечению S_1 совпадает по направлению с вектором индукции \mathbf{B}_1 , а внешняя нормаль \mathbf{n}_2 к сечению S_2 противоположна вектору индукции \mathbf{B}_2 . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{m1} &= \int_{S_1} B_n dS = \int_{S_1} B_1 dS = B_1 S_1, \\ \Phi_{m2} &= \int_{S_2} B_n dS = - \int_{S_2} B_2 dS = -B_2 S_2 \end{aligned} \right\} \quad (16.17')$$

Подставив эти значения в (16.18) и учитывая, что $S_1 = S_2 = S$, получим $B_1 = B_2$. Следовательно, индукция магнитного поля тороида с составным сердечником во всех его сечениях одинакова. Поэтому в дальнейшем будем ее обозначать через B без индекса, а магнитный поток в сердечнике — через Φ_m :

$$\Phi_m = BS. \quad (16.19)$$

4. Для нахождения индукции B воспользуемся законом полного тока (16.9), причем в качестве замкнутого контура L возьмем осевую линию тороида (см. рис. 16.7), представляющую собой одну из линий магнитной индукции. Вектор напряженности \mathbf{H} направлен по касательной к контуру L во всех его точках, так что

$$H \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = H. \quad (16.20)$$

По формуле (15.7) напряженности H_1 и H_2 магнитного поля в первой и второй частях сердечника тороида равны:

$$H_1 = B/\mu_1\mu_0, \quad H_2 = B/\mu_2\mu_0. \quad (16.21)$$

Из (16.20) и (16.21) следует, что циркуляция вектора \mathbf{H} вдоль замкнутого контура L равна

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = \int_{l_1} H_1 dl + \int_{l_2} H_2 dl = H_1 l_1 + H_2 l_2,$$

где l_1 и l_2 — длины первой и второй частей магнитной цепи. С другой стороны, из закона полного тока (16.9) следует, что

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI, \quad (16.22)$$

где I — сила тока, N — число витков в обмотке тороида. Выразив H_1 и H_2 через B по формулам (16.21), получим

$$B \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0} + B \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0} = NI,$$

или

$$B = \frac{NI}{(l_1/\mu_1\mu_0) + (l_2/\mu_2\mu_0)}. \quad (16.23)$$

Подставляя значение B в (16.19), находим магнитный поток в сердечнике тороида:

$$\Phi_m = \frac{IN}{(l_1/\mu_1\mu_0 S) + (l_2/\mu_2\mu_0 S)}. \quad (16.24)$$

Выражение (16.24) по своей форме подобно закону Ома для замкнутой электрической цепи:

$$I = \mathcal{E}/R, \quad (16.25)$$

где \mathcal{E} — электродвижущая сила, R — электрическое сопротивление

цепи. Поэтому естественно ввести обозначения:

$$\mathcal{E}_m = IN, \quad R_m = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S} \quad (16.26)$$

и назвать \mathcal{E}_m магнитодвижущей силой, а R_m — полным магнитным сопротивлением цепи. Тогда формула (16.24) принимает вид

$$\Phi_m = \mathcal{E}_m / R_m. \quad (16.27)$$

Это соотношение называется **формулой Голкинсона** для магнитной цепи.

5. Магнитное сопротивление R_m участка цепи длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S и относительной магнитной проницаемостью μ принимается равным

$$R_m = l / \mu \mu_0 S. \quad (16.28)$$

Если площадь поперечного сечения S непостоянна, то

$$R_m = \int_0^l \frac{dl}{\mu \mu_0 S}. \quad (16.28')$$

Формула (16.28) подобна по своему виду формуле для электрического сопротивления цилиндрического проводника [см. (9.8')]:

$$R = l / \gamma S, \quad (16.29)$$

причем аналогом удельной электрической проводимости γ является абсолютная магнитная проницаемость $\mu \mu_0$.

6. Из формул (16.28) и (16.26) видно, что общее магнитное сопротивление R_m последовательно соединенных участков магнитной цепи, число которых n , равно сумме магнитных сопротивлений R_{mi} всех участков:

$$R_m = \sum_{i=1}^n R_{mi} \quad (16.30)$$

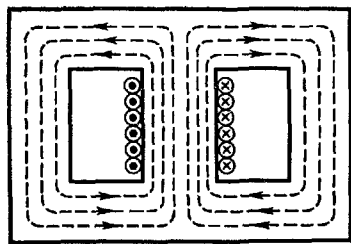


Рис. 16.9

Эта формула аналогична выражению для общего электрического сопротивления последовательно соединенных проводников.

7. Можно доказать, что для расчета разветвленных магнитных цепей (рис. 16.9) справедливы два **правила Кирхгофа**, которые по своей форме аналогичны правилам Кирхгофа для цепей постоянного электрического тока (см. § 9.4).

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма магнитных потоков в n участках цепи, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{mi} = 0. \quad (16.31)$$

Знак магнитного потока Φ_{mi} определяется направлением соответствующих ему линий индукции. Если линии индукции подходят к узлу, то поток Φ_{mi} считают положительным, а если линии индукции выходят из узла, то поток Φ_{mi} отрицателен.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной магнитной цепи, алгебраическая сумма произведений магнитных потоков на магнитные сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил в этом контуре, т.е.

$$\sum_{i=1}^k \Phi_{mi} R_{mi} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_{mi}, \quad (16.32)$$

где k — число участков, составляющих замкнутый контур. Магнитные потоки Φ_{mi} и магнитодвижущие силы \mathcal{E}_{mi} считаются в этом уравнении положительными, если направление соответствующих им магнитных полей (линий индукции) совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура.

8. Из правил Кирхгофа вытекает, что магнитные потоки в двух параллельно включенных участках магнитной цепи, не содержащих магнитодвижущих сил, обратно пропорциональны их магнитным сопротивлениям:

$$\frac{\Phi_{m1}}{\Phi_{m2}} = \frac{R_{m2}}{R_{m1}}. \quad (16.33)$$

Общее магнитное сопротивление R_m участка цепи, состоящего из n параллельно включенных магнитных сопротивлений R_{mi} , равно

$$R_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^n 1/R_{mi}}. \quad (16.34)$$

9. Рассмотренные законы магнитных цепей можно проиллюстрировать рядом опытов.

Опыт 1. Последовательное соединение магнитных сопротивлений.

Два одинаковых электромагнита с железными сердечниками A и C укрепим параллельно друг другу в деревянном каркасе D ($\mu \approx 1$), как показано на рис. 16.10. При пропускании тока через обмотки электромагнитов (на рис. 16.10 заштрихованы) сердечники A и C намагничиваются. Пусть направления токов в обмотках таковы, что в сердечнике A линии магнитной индукции идут сверху вниз, а в сердечнике C — снизу вверх. Верхние концы сердечников замкнем накоротко толстой железной пластиной E . Поднесем к нижним полюсам сердечников толстую железную пластину F с грузом P и подберем такую силу тока в обмотках электромагнитов, при которой пластина F прочно удерживается ими. Затем, сохраняя неизменной силу тока в обмотках, удалим верхнюю пластину E . При этом нижняя пластина F под действием груза P отрывается. Это явление легко объяснить, если учесть, что подъемная сила электромагнита зависит от значения магнитной ин-

дукции в сердечнике, т.е. от пропорциональной ей величины Φ_m магнитного потока. При постоянной силе тока в обмотках поток Φ_m в магнитной цепи электромагнитов, состоящей из четырех последовательно включенных магнитных сопротивлений R_{mA} , R_{mC} , R_{mE} и R_{mF} ,

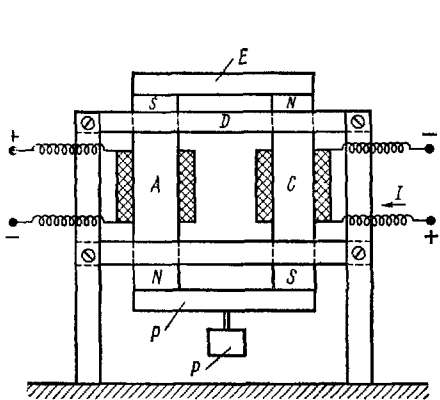


Рис. 16.10

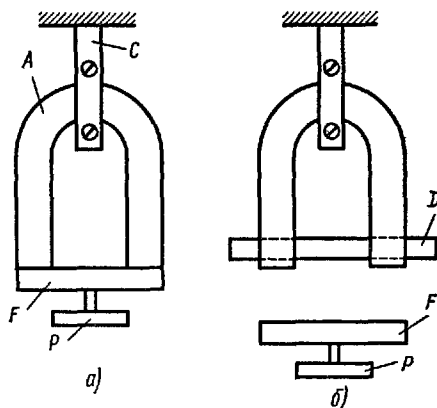


Рис. 16.11

обратно пропорционален сумме этих сопротивлений [см. формулы (16.27) и (16.30)]:

$$\Phi_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_{mA} + R_{mC} + R_{mE} + R_{mF}} = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}.$$

Удаляя пластину E , мы сильно увеличиваем общее сопротивление магнитной цепи, так как относительная магнитная проницаемость воздуха во много раз меньше, чем у железа. Поэтому удаление пластины приводит к значительному ослаблению магнитного поля электромагнитов, а следовательно, и к резкому уменьшению их подъемной силы.

О п ы т 2. Магнитный шунт.

Сильный подковообразный магнит A укреплен вертикально в деревянном зажиме C (рис. 16.11). Полюсы магнита замкнуты железной пластиной F с грузом P , подобранным так, чтобы сила тяжести пластины F и груза P была несколько меньше подъемной силы магнита (рис. 16.11, а). Если с помощью железной пластины D замкнут полюсы магнита A , как показано на рис. 16.11, б, то пластина F отрывается от магнита и падает вниз. Присоединение пластины D приводит к разветвлению магнитной цепи, так что на пластину F приходится лишь часть магнитного потока подковообразного магнита и соответствующее ему магнитное поле недостаточно для удержания пластины F в равновесии.

Закоротим полюсы магнита A пластиной D , изготовленной из алюминия. При этом пластина F с грузом P по-прежнему будет прочно удерживаться магнитом A . Причина этого явления состоит в том, что относительная магнитная проницаемость алюминия, как и других ферромагнитных материалов (см. § 20.5), очень близка к относитель-

ной магнитной проницаемости воздуха. Поэтому введение алюминиевой пластины D не должно влиять на распределение магнитного потока в цепи подковообразного магнита.

Опыт 3. Экранирование магнитного поля.

Возьмем магнитную стрелку, свободно вращающуюся вокруг вертикальной оси. Приблизим к ней северный полюс полосового магнита. Под влиянием поля магнита стрелка повернется к нему своим южным полюсом. При перемещении полосового магнита следом за ним повернется и магнитная стрелка. Совершенно иная картина наблюдается, если магнит поместить внутрь толстой железной трубы. Поле такого магнита не действует на магнитную стрелку, которая независимо от положения трубы с магнитом всегда располагается в плоскости магнитного меридиана поля Земли. Если на магнит надеть трубу, сделанную из алюминия, меди или другого неферромагнитного материала, то его действие на стрелку будет таким же, как и в отсутствие трубы.

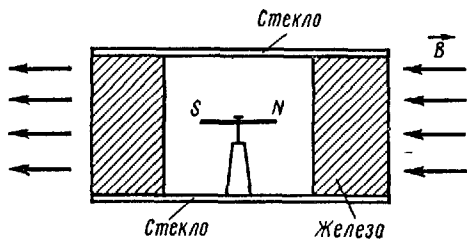


Рис. 16.12

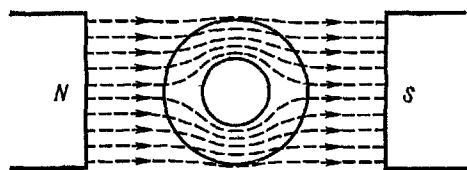


Рис. 16.13

Опыт 4. Поместим магнитную стрелку, свободно вращающуюся вокруг вертикальной оси, внутрь цилиндрической коробки, боковая стенка которой изготовлена из куска толстой железной трубы, а верхняя и нижняя стенки — стеклянные (рис. 16.12). Помещая коробку в однородное магнитное поле с индукцией B , направление которого показано на рис. 16.12, мы не обнаружим никакого действия магнитного поля на стрелку. Независимо от направления поля стрелка будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Следовательно, внутри коробки магнитное поле отсутствует, так же как в предыдущем опыте оно отсутствует вне железной трубы, надетой на полосовой магнит. Это явление широко используется для защиты измерительных приборов от влияния внешних магнитных полей.

Экранирующее действие стенок железного сосуда можно объяснить, исходя из законов магнитных цепей. На рис. 16.13 показано массивное железное кольцо, помещенное между полюсами электромагнита. Внутренняя полость и стенки кольца представляют собой параллельно включенные магнитные сопротивления. Магнитные потоки в них по формуле (16.33) обратно пропорциональны их магнитным сопротивлениям. Относительная магнитная проницаемость железа во

много раз больше, чем воздуха. Поэтому поток индукции, а следовательно, и индукция магнитного поля в воздушной полости железного кольца практически равны нулю. Магнитное поле концентрируется («сгущается») внутри стенок кольца. На рис. 16.13 показано влияние железного кольца на ход линий индукции в зазоре между полюсами электромагнита.

Вопросы для повторения

1. Какой закон выражает вихревой характер магнитного поля? Докажите справедливость этого закона для какого-нибудь простейшего случая.
2. Найдите напряженность в произвольной точке магнитных полей, создаваемых тороидом и бесконечно длинным соленоидом.
3. Что называется магнитным потоком? В чем состоит теорема Остроградского—Гаусса для магнитного поля и каков ее физический смысл?
4. В чем состоят правила Кирхгофа для магнитных цепей?
5. Каким образом можно осуществить экранирование магнитного поля?

Примеры решения задач

Задача 16.1. В железном торе сделан поперечный прорез шириной l_1 . Радиус осевой окружности тора $R = 10$ см. По обмотке, имеющейся на торе и состоящей из $N = 3600$ витков, пропускается ток. При силе тока $I = 2$ А магнитная индукция в зазоре $B_1 = 10$ кГс, а относительная магнитная проницаемость железа $\mu_2 = 2000$. Определить ширину прореза l_1 , считая, что площадь S_1 поперечного сечения магнитной цепи в прорезе в 1,12 раза больше площади S_2 поперечного сечения тора.

Дано:

$$B_1 = 1 \text{ Т}$$

$$R = 0,1 \text{ м}$$

$$I = 2 \text{ А}$$

$$N = 3600$$

$$\mu_2 = 2000$$

$$\mu_1 = 1 \text{ (воздух)}$$

$$(S_1/S_2) = 1,12$$

$$l_1 = ?$$

Решение. По формуле Гопкинсона (16.27), магнитный поток в зазоре

$$\Phi_m = \mathcal{E}_m / R_m,$$

где $\mathcal{E}_m = IN$ — магнитодвижущая сила, R_m — полное магнитное сопротивление цепи, равное сумме магнитных сопротивлений зазора (R_{m_1}) и железного сердечника (R_{m_2}): $R_m = R_{m_1} + R_{m_2}$.

По формуле (16.28) найдем R_{m_1} и R_{m_2} :

$$R_{m_1} = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} \quad \text{и} \quad R_{m_2} = \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2},$$

где $l_2 = 2\pi R - l_1$ — средняя длина железного сердечника. Таким образом,

$$\Phi_m = IN \left/ \left(\frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} + \frac{2\pi R - l_1}{\mu_2 \mu_0 S_2} \right) \right. \quad (a)$$

Магнитный поток в зазоре равен

$$\Phi_m = B_1 S_1. \quad (b)$$

Из (a) и (b) после несложных преобразований получим

$$l_1 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_0 IN - 2\mu_1 \pi R B_1 (S_1/S_2)}{[\mu_2 - \mu_1 (S_1/S_2)] B_1}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$l_1 = \frac{2000 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600 - 2 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot 1,12}{(2000 - 1,12) \cdot 1} \text{ м} = 8,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$