Подставив это выражение в формулу (17.19), получим

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2} n_1 I_1 \cdot \frac{1}{2} \frac{R_1^2}{x^2}, \text{ или } B_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{n_1 I_1 S_1}{x^2}, \qquad (17.21)$$

где $S_1 = \pi R_1^2$ — площадь витков соленоида A.

2. Магнитный момент одного витка соленоида A равен $\mathbf{p}_m = I_2 S_2 \mathbf{i}$. Если центр этого витка находится в точке C, то действующую на него силу можно найти по формуле (17.8):

$$\mathbf{F}' = I_2 S_2 \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial x} = -\frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_2 S_2 n_1 I_1 S_1 \frac{1}{x^3} \mathbf{i}. \qquad (17.22)$$

На участке соленоида $Б$ длиной dx размещается $n_2 dx$ витков. Поэтому сила $d\mathbf{F}$, действующая на элемент соленоида $Б$ длиной dx со стороны магнитного поля соленоида A, равна

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}' n_2 dx = -\frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_2 S_2 n_1 I_1 S_1 \frac{n_2 dx}{x^2} \mathbf{i}. \qquad (17.23)$$

Интегрируя это выражение по всей длине соленоида $Б$, т. е. от $x = a$ до $x = \infty$, найдем силу взаимодействия между двумя бесконечно длинными соленоидами A и $Б$:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_2 S_2 n_1 I_1 S_1 n_2 \int_a^\infty \frac{dx}{x^3} \mathbf{i} = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 S_2 n_2 I_1 S_1 n_1}{a^2} \mathbf{i}. \qquad (17.24)$$

Знак минус в формуле (17.24) свидетельствует о том, что сила $\mathbf{F}$, действующая на соленоид $Б$, направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси X. Действительно, при выбранных на рис. 17.9 направлениях токов I_1 и I_2 соленоиды притягиваются друг к другу.

Если оси соленоидов A и $Б$ не совпадают друг с другом, то силовое взаимодействие между ними носит более сложный характер. При этом возникают также моменты сил, стремящиеся повернуть соленоиды так, чтобы их оси совпали, а магнитные моменты были направлены в одну сторону. Формула (17.24) не справедлива в случае взаимодействия коротких и близко расположенных друг к другу соосных катушек с током.

§ 17.4. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле

1. На проводник с током в магнитном поле действуют силы, подчиняющиеся закону Ампера (14.5) и часто называемые поэтому **силами Ампера.** Вычислим работу, совершаемую этими силами при перемещении проводника с током в магнитном поле. При малом перемещении $d\mathbf{r}$ элемента $d\mathbf{l}$ проводника с током I работа силы Ампера $d\mathbf{F}$ равна

$$\delta A^* = d\mathbf{F}\, d\mathbf{r}. \qquad (17.25)$$

По закону Ампера (14.5),

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\,\mathbf{B}],$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция. Подставив это выражение в (17.25), получим

$$\delta A^* = I[d\mathbf{l}\,\mathbf{B}]\, d\mathbf{r} = I d\mathbf{r}\, [d\mathbf{l}\,\mathbf{B}]. \qquad (17.26)$$

Из векторной алгебры известно, что смешанное произведение трех векторов не изменится, если в нем произвести циклическую перестановку сомножителей. Поэтому выражение (17.26) можно переписать в виде

$$\delta A^* = I\mathbf{B}[d\mathbf{r}\, d\mathbf{l}] = I\mathbf{B}\, d\mathbf{S}, \tag{17.26'}$$

или

$$\delta A^* = I d\Phi_m^* , \tag{17.26''}$$

где $d\mathbf{S} = [d\mathbf{r} d\mathbf{l}]$ — вектор малой площадки dS, прочерчиваемой элементом проводника длиной dl при его малом перемещении $d\mathbf{r}$ (рис. 17.10), $d\Phi_m^* = \mathbf{B} d\mathbf{S}$ — магнитный поток сквозь эту площадку.

2. Элементарная работа δA амперовых сил при малом перемещении проводника конечной длины равна сумме элементарных работ δA^* амперовых сил для всех малых участков этого проводника, т.е. интегралу от $Id\Phi_m^*$, взятому по длине l проводника:

$$\delta A = \int_l I\, d\,\Phi_m^* .$$

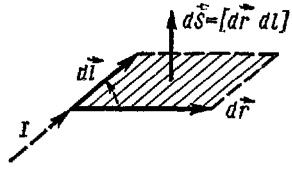

Рис. 17.10

Сила тока I не изменяется по длине проводника. Поэтому

$$\delta A = I \int_l d\Phi_m^* = I d\Phi_m, \tag{17.27}$$

где

$$d\Phi_m = \int_l d\Phi_m^* = \int_l \mathbf{B}[d\mathbf{r}\, d\mathbf{l}] \tag{17.27'}$$

— магнитный поток сквозь поверхность, прочерчиваемую всем проводником при малом перемещении этого проводника. Заметим попутно, что вектор перемещения $d\mathbf{r}$, стоящий в подынтегральном выражении, вообще говоря, различен для разных точек проводника (он постоянен по длине проводника только если последний движется поступательно).

Если проводник, ток в котором поддерживается постоянным, совершает конечное перемещение, то работа амперовых сил на этом перемещении

$$A = I\,\Phi_m . \tag{17 28}$$

Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле проводника, ток в котором постоянен, равна произведению силы тока на магнитный поток сквозь поверхность, которую прочерчивает проводник при своем движении.

3. Найдем работу амперовых сил при перемещении в магнитном поле **замкнутого контура** с током I. Пусть в результате малого перемещения контур перешел из положения C в положение C' (рис. 17.11). При этом малый элемент $d\mathbf{l}$ контура совершил перемещение $d\mathbf{r}$ и прочертил малую площадку dS. Вектор этой площадки $d\mathbf{S} = [d\mathbf{r}d\mathbf{l}]$ показан на рис. 17.11.

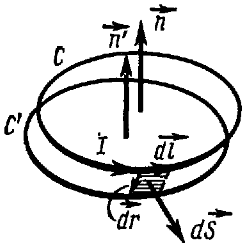

Рис. 17.11

Искомая работа амперовых сил δA при малом перемещении контура выражается формулой (17.27). Однако в данном случае величине $d\Phi_m$ можно дать иное толкование. Для этого рассмотрим магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на контур. В электротехнике этот поток часто называют «магнитным потоком, сцепленным с контуром». При вычислении указанного магнитного потока Φ_m направление нормали согласуют с направлением тока в контуре по правилу буравчика: из конца вектора нормали ток в контуре должен быть виден идущим против часовой стрелки. Соответствующие направления нормалей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ в положениях C и C' контура показаны на рис. 17.11[1].

Поверхности, натянутые на контур в его положениях C и C', а также поверхность, прочерченная контуром при переходе из C и C', образуют замкнутую поверхность. Согласно теореме Остроградского—Гаусса, магнитный поток сквозь нее равен нулю, т.е. если при вычислении этого потока брать **внешние** нормали, то

$$\Phi_m - \Phi'_m + d\Phi_m = 0. \qquad (17.29)$$

Знак минус перед членом Φ_m' взят потому, что при его вычислении использована нормаль $\mathbf{n}'$, являющаяся внутренней нормалью к соответствующему участку замкнутой поверхности. Из (17.29) следует, что $d\Phi_m = \Phi'_m - \Phi_m$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром, происходящее при его малом перемещении.

Интегрируя выражение (17.27), найдем работу, совершаемую силами Ампера при перемещении контура с током из начального положения 1 в произвольное конечное положение 2:

$$A_{1\text{-}2} = \int_1^2 I\, d\Phi_m. \qquad (17.30)$$

Если в процессе перемещения контура сила тока в нем остается постоянной, то

$$A_{1\text{-}2} = I \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} d\Phi_m = I\,(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}). \qquad (17.31)$$

[1] Этот рисунок соответствует простейшему случаю, когда контур и натянутая на него поверхность плоские, так что для всех малых участков поверхности векторы нормалей направлены одинаково.

Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура, по которому проходит постоянный ток, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.

4. При выводе формул (17.30) и (17.31) мы рассматривали простейший замкнутый контур, состоящий из одного плоского витка провода (рис. 17.11). Однако они в равной мере справедливы для контуров любой формы. Например, в случае перемещения в магнитном поле катушки с током, состоящей из N витков провода, элементарная работа δA сил Ампера равна

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i,$$

где δA_i — элементарная работа этих сил при перемещении одного i-го витка. По формуле (17.27), $\delta A_i = I d\Phi_{mi}$ и

$$\delta A = I \sum_{i=1}^{N} d\Phi_{mi} = I d\left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_{mi}\right). \tag{17.32}$$

Эта формула тождественна с (17.27), если в последней под Φ_m понимать полный магнитный поток сквозь все N витков катушки:

$$\Phi_m = \sum_{i=1}^{N} \Phi_{mi}$$

В электротехнике принято обозначать полный магнитный поток через Ψ и называть его **потокосцеплением контура** (в отличие от магнитного потока сквозь один виток, обозначаемого через Φ_m). Поэтому формулу (17.32) записывают в виде

$$\delta A = I\, d\Psi. \tag{17.33}$$

Потокосцепление контура обусловлено как внешним магнитным полем, так и магнитным полем тока I в самом контуре. Если внешнего поля нет, то потокосцепление контура обусловлено только магнитным полем тока в этом контуре и называется **потокосцеплением самоиндукции** (Ψ_c). Наконец, если внешнее магнитное поле создается электрическим током в каком-то контуре, то соответствующее ему потокосцепление другого контура называется **потокосцеплением взаимной индукции** этих двух контуров.

Вопросы для повторения

1. Как действуют на плоский замкнутый контур тока однородное и неоднородное магнитные поля?
2. Опишите устройство и принцип действия баллистического гальванометра.
3. Почему магнитоэлектрический гальванометр пригоден для измерения только постоянных токов? Какие токи можно измерять с помощью электродинамических приборов?
4. Найдите выражение для работы, совершаемой силами магнитного поля при перемещении в нем проводника с током и замкнутого контура с током.