$$\Delta\varphi_2 = \mathscr{E}_2 = -M_{21\ \text{дин}} \frac{dI_1}{dt}. \qquad (19.47)$$

Аналогично, $\Delta\varphi_1$ равно разности между э.д.с. $\mathscr{E}$ источника электрической энергии и напряжением $I_1 r$ на его внутреннем сопротивлении r, т. е.

$$\Delta\varphi_1 = \mathscr{E} - I_1 r.$$

По закону Ома,

$$I_1 = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}_1}{R_1 + r} \quad \text{и} \quad \Delta\varphi_1 = I_1 R_1 - \mathscr{E}_1,$$

где R_1 — сопротивление первичной обмотки, $\mathscr{E}_1$ — э.д.с. самоиндукции в ней. Заменив $\mathscr{E}_1$ ее выражением по формуле (19.30′), получим

$$\Delta\varphi_1 = I_1 R_1 + L_{1\ \text{дин}} \frac{dI_1}{dt}.$$

Для всех существующих трансформаторов первый член правой части этого равенства пренебрежимо мал по сравнению со вторым. Поэтому приближенно можно считать, что

$$\Delta\varphi_1 = L_{1\ \text{дин}} \frac{dI_1}{dt}. \qquad (19.48)$$

Из соотношений (19.45)—(19.48) следует, что коэффициент трансформации при холостом ходе равен

$$\left|\frac{\Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_1}\right| = \frac{M_{21\ \text{дин}}}{L_{1\ \text{дин}}} = \frac{N_2}{N_1}. \qquad (19.49)$$

8. Трансформаторы чрезвычайно широко применяются в современной электро- и радиотехнике. Они позволяют сравнительно просто и с ничтожными потерями энергии изменять в нужных пределах напряжение переменного тока.

§ 19.6. Энергия магнитного поля электрического тока

1. Во всех выводах этого параграфа предполагается, что проводники с током находятся в неферромагнитной однородной и изотропной среде.

В § 19.4 было показано, что при возрастании тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции, противодействующая увеличению тока. По закону Ома сила тока I в контуре с сопротивлением R и индуктивностью L равна

$$I = (\mathscr{E} + \mathscr{E}_c)/R,$$

где $\mathscr{E}$ — э. д. с. источника электрической энергии, а $\mathscr{E}_c$ — э. д. с. самоиндукции, которая по формуле (19.30) равна $\mathscr{E}_c = -L(dI/dt)$. Таким образом,

$$\mathscr{E} = IR + L\,(dI/dt).$$

Работа, совершаемая источником электрической энергии за время dt, равна

$$\mathscr{E} I\,dt = I^2 R\,dt + LI\,dI. \qquad (19.50)$$

Первый член правой части уравнения (19.50) представляет обычную ленц-джоулеву работу, расходуемую на нагревание проводника. Второй член — дополнительная работа, обусловленная индукционными явлениями. Дополнительная работа A, затрачиваемая на увеличение тока в контуре от нуля до I, запишется в виде

$$A = \int_0^I L I dI = \frac{LI^2}{2}. \tag{19.51}$$

Выражение $LI^2/2$ принято называть **собственной энергией** тока I в контуре с индуктивностью L.

2. Увеличение тока в проводнике вызывает соответствующее усиление его магнитного поля, которое, подобно электрическому полю, обладает энергией. Найденная нами собственная энергия тока в контуре есть не что иное, как энергия W_m магнитного поля этого контура с током.

В качестве примера рассмотрим однородное магнитное поле длинного соленоида, индуктивность которого $L = \mu\mu_0 n^2 V$ [см. (19.28)], где V — объем поля соленоида. Магнитная индукция поля соленоида выражается формулой (15.41): $B = \mu\mu_0 nI$, откуда

$$I = \frac{B}{\mu\mu_0} \frac{1}{n}. \tag{19.52}$$

Подставив эти значения для L и I в (19.51), найдем энергию магнитного поля длинного соленоида:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V. \tag{19.53}$$

Поскольку рассматриваемое поле однородно, его энергия W_m распределена равномерно по всему объему V поля с объемной плотностью

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0}. \tag{19.54}$$

Так как индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$, то выражение (19.54) можно записать в следующих трех эквивалентных формах:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2. \tag{19.54'}$$

Формулы (19.54) и (19.54′) справедливы для магнитного поля в изотропной среде. Если же среда анизотропна, то объемная плотность энергии магнитного поля

$$w_m = \mathbf{BH}/2. \tag{19.54''}$$

3. Рассмотрим теперь неоднородное магнитное поле, создаваемое током I в контуре произвольной формы, индуктивность кото-

рого L. В пределах бесконечно малого объема dV поле можно считать однородным. Поэтому энергия объема dV поля равна

$$dW_m = w_m dV = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} dV.$$

Интегрируя это выражение по всему объему V поля, находим полную энергию W_m магнитного поля:

$$W_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0\mu} dV. \tag{19 55}$$

С другой стороны,

$$W_m = LI^2/2. \tag{19 56}$$

Таким образом, можно дать следующее энергетическое определение индуктивности: индуктивность контура численно равна удвоенной энергии магнитного поля, создаваемого проходящим по контуру током единичной силы.

По формуле (19.25), $LI = \Phi_{mc}$ — магнитный поток самоиндукции контура. Поэтому энергию магнитного поля этого контура (19.56) можно представить в виде

$$W_m = \Phi_{mc} I/2. \tag{19.57}$$

4. В общем случае магнитное поле создается произвольной системой из n контуров с различными токами $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Энергия такого поля выражается универсальной формулой (19.55). Однако, как показывают расчеты, эту энергию можно также представить в форме, аналогичной (19.57):

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Phi_{mk} I_k. \tag{19.58}$$

Здесь Φ_{mk} — полный магнитный поток, сцепленный с k-м контуром. При вычислении этого потока нормаль $\mathbf{n}_k$ к поверхности, натянутой на контур, проводится так, чтобы из конца вектора $\mathbf{n}_k$ ток в контуре был виден идущим против часовой стрелки. Магнитный поток Φ_{mk} равен сумме потока самоиндукции $(\Phi_{mk})_c$ рассматриваемого контура и потока его взаимной индукции $(\Phi_{mk})_{вз}$, соответствующего магнитному полю всех остальных контуров с токами:

$$\Phi_{mk} = (\Phi_{mk})_c + (\Phi_{mk})_{вз}.$$

Так как $(\Phi_{mk})_c = L_k I_k$ и $(\Phi_{mk})_{вз} = \sum\limits_{\substack{l=1 \\ (l\neq k)}}^{n} M_{kl} I_l$, то

$$\Phi_{mk} = L_k I_k + \sum_{\substack{l=1 \\ (l\neq k)}}^{n} M_{kl} I_l, \tag{19.59}$$

где L_k — индуктивность k-го контура, M_{kl} — взаимная индуктивность k-го и l-го контуров. Таким образом, энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} L_k I_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{n} M_{kl} I_k I_l. \qquad (19.60)$$

Первая сумма в правой части этого выражения представляет собой сумму собственных энергий всех токов, а вторая — так называемую **взаимную энергию токов:**

$$W_{вз} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{n} M_{kl} I_k I_l. \qquad (19.61)$$

Следует заметить, что в соответствии с указанным выше правилом выбора направления вектора нормали $\mathbf{n}_k$ при вычислении магнитного

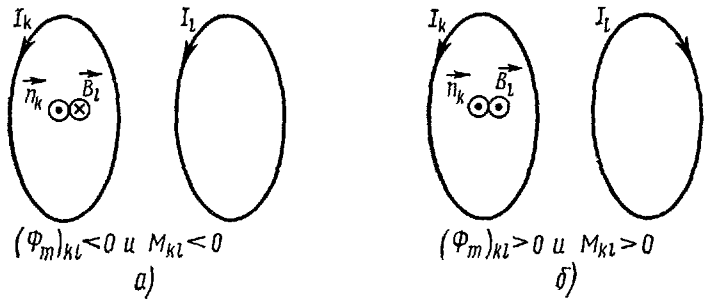

Рис. 19.17

потока Φ_{mk} взаимные индуктивности M_{kl} k-го и l-го контуров могут быть как положительными (рис. 19.17,*б*), так и отрицательными (рис. 19.17,*а*).

Вопросы для повторения

1. В чем состоит явление электромагнитной индукции? Опишите опыты Фарадея.
2. Сформулируйте законы Фарадея и Ленца для электромагнитной индукции. *Проиллюстрируйте их примерами.*
3. Покажите, что основной закон электромагнитной индукции является следствием закона сохранения энергии.
4. Как доказать, что электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем, является вихревым?
5. Найдите выражения для э.д.с. индукции и индукционного тока в плоском витке, равномерно вращающемся в однородном магнитном поле.
6. Что представляют собой вихревые токи? Какие практические применения они находят? Каковы способы борьбы с ними?
7. В чем состоят явления самоиндукции и взаимной индукции? Напишите выражения для э.д.с. индукции в обоих случаях.
8. Что называется индуктивностью проводящего контура и взаимной индуктивностью двух контуров? От чего они зависят и каков их физический смысл?