которые создают свои электрические и магнитные поля, непрерывн изменяющиеся в каждой точке пространства. Поэтому и результирующие электрическое и магнитное поля всегда переменны. Эти поля получили название **микрополей.**

Из сказанного выше следует, что в теории Максвелла рассматриваются у с р е д н е н н ы е электрическое и магнитное поля, причем усреднение соответствующих микрополей производится для интервалов времени, значительно бо́льших периодов обращения или колебания элементарных зарядов, и для участков поля, объемы которых во много раз больше объемов атомов и молекул.

§ 21.2. Первое уравнение Максвелла. Бетатрон

1. В § 19.1 было показано, что э. д. с. индукции, возбуждаемая в неподвижном замкнутом п р о в о д я щ е м контуре, выражается формулой (19.12):

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}. \tag{21.1}$$

Тем самым было выяснено, что переменное магнитное поле создает в проводящем замкнутом контуре вихревое электрическое поле. Максвелл предложил считать, что соотношение (21.1) справедливо не только для проводящего, но и для л ю б о г о замкнутого контура, мысленно выбранного в переменном магнитном поле. Иными словами, он предположил, что *переменное магнитное поле создает в любой точке пространства вихревое электрическое поле* независимо от того, находится в этой точке проводник или нет. Обобщенное таким образом равенство (21.1) называется **первым уравнением Максвелла в интегральной форме**: *циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру L равна взятой в обратным знаком скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур.*

Магнитный поток $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$. Считая поверхность интегрирования S, натянутую на неподвижный контур L, тоже неподвижной, получим

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Поэтому первое уравнение Максвелла (21.1) можно также записать в форме

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \tag{21.2}$$

где направление обхода контура L и векторов $d\mathbf{S}$ согласовано между собой по правилу буравчика [см. соответствующее замечание к формуле (19.12)].

Если рассматриваемый контур — проводящий и в нем помимо э. д. с. электромагнитной индукции имеются другие э. д. с. $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ..., $\mathscr{E}_n$, то для такого контура

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k. \tag{21.2'}$$

2. Возникновение в пространстве вихревого электрического поля под влиянием переменного магнитного поля было использовано для создания индукционного ускорителя электронов — **бетатрона**. Идея этого метода ускорения электронов высказана в 1928 г. Р. Видероэ. В дальнейшем она была разработана Я. П. Терлецким.

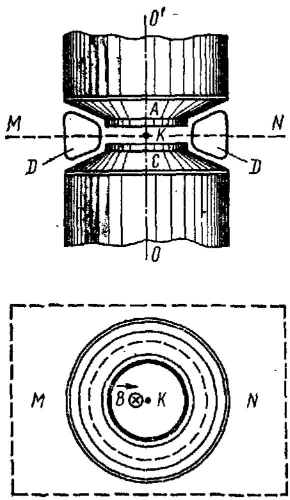

Рис. 21.1

Основными элементами бетатрона являются сильный электромагнит с коническими полюсными наконечниками A и C (рис. 21.1) и вакуумная ускорительная камера D, имеющая форму замкнутого кольца. Ось камеры совпадает с осью симметрии OO' полюсных наконечников. Изменение силы тока в обмотке электромагнита вызывает в пространстве между его полюсами изменение магнитного поля и возникновение вихревого электрического поля. Магнитное поле симметрично относительно оси OO'. Поэтому силовые линии вихревого электрического поля в плоскости MN, перпендикулярной оси OO' и проходящей через середину зазора между полюсами, имеют вид окружностей, центры которых лежат в точке K. Числовые значения напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля во всех точках каждой окружности одинаковы.

Циркуляция вектора $\mathbf{E}$ вдоль окружности радиуса r равна

$$\oint_r \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \oint_r E_\tau\, dl = 2\pi r E_\tau \tag{21.3}$$

где E_τ — проекция вектора $\mathbf{E}$ на касательную к окружности. По уравнению (21.1) с учетом формулы (16.14) также имеем

$$\oint_r \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n\, dS, \tag{21.4}$$

где $S = \pi r^2$ — площадь круга радиуса r, B_n — проекция вектора магнитной индукции на ось OO'. Из условия симметрии ясно, что во всех точках круга вектор $\mathbf{B}$ параллелен оси OO'. Поэтому

$$\int_S B_n\, dS = \int_S B\,dS = B_{\text{ср}} S = \pi r^2 B_{\text{ср}},$$

где $B_{ср}$ — среднее значение магнитной индукции в пределах круга радиуса r. Таким образом, (21.4) можно записать в форме

$$\oint_r \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\pi r^2 \frac{\partial B_{ср}}{\partial t}. \qquad (21.5)$$

Приравнивая правые части уравнений (21.3) и (21.5) и учитывая, что $(\partial B_{ср}/\partial t) = (dB_{ср}/dt)$, так как $B_{ср}$ зависит только от t, получаем выражение для напряженности вихревого электрического поля:

$$E_\tau = -\frac{1}{2} r \frac{dB_{ср}}{dt}. \qquad (21.6)$$

3. Введем в камеру D электрон таким образом, чтобы его скорость $\mathbf{v}$ была направлена по касательной к рассмотренной выше окружности — силовой линии электрического поля. На электрон действует электрическая сила, направленная по касательной к силовой линии в сторону, противоположную вектору $\mathbf{E}$. Изменение числового значения импульса электрона под действием этой силы за малое время dt равно

$$d(mv) = -eE_\tau dt.$$

Подставив значение E_τ из (21.6), получим

$$d(mv) = \frac{er}{2} dB_{ср}. \qquad (21.7)$$

Если индукция магнитного поля бетатрона зависит от времени по *линейному* закону, то $(dB_{ср}/dt) = \text{const}$ и напряженность E тоже постоянна во всех точках окружности радиуса r.

Предположим, что электрон непрерывно движется по одной и той же окружности радиуса r и что его начальной кинетической энергией можно пренебречь. Тогда за n оборотов он приобретет энергию $2\pi reEn$. Если даже энергия, приобретаемая электроном за один оборот, невелика, то за большое число оборотов она может сильно возрасти. Пусть, например, равномерное изменение магнитного поля таково, что при однократном обходе окружности радиуса $r = 0{,}4$ м электрон приобретает энергию 20 эВ. Тогда за время $8{,}45 \cdot 10^{-3}$ с электрон пройдет путь 2520 км, сделает 10^6 оборотов и накопит энергию 20 МэВ. При этой энергии масса электрона будет примерно в 40 раз больше его массы покоя, но это возрастание массы не повлияет на процесс ускорения электрона. В бетатроне в отличие от ускорителей, рассмотренных в § 18.5, не существует проблемы синхронизации. Единственным условием ускорения электрона является его непрерывное движение по одной и той же орбите. Предположим, что это условие выполнено и электрон все время находится на орбите постоянного радиуса r. Пусть в отсутствие магнитного поля, т. е. при $B = B_{ср} = 0$, скорость электрона $v = 0$.

Проинтегрируем выражение (21.7):

$$\int_0^{mv} d(mv) = \frac{er}{2} \int_0^{B_{ср}} dB_{ср},$$

$$mv = er\frac{B_{ср}}{2}. \qquad (21.8)$$

Сопоставим это выражение с формулой (18.19), определяющей радиус r кривизны стабильной траектории электрона в магнитном поле, направленном перпендикулярно ее плоскости:

$$mv = erB.$$

Сравнение двух последних выражений приводит к следующему **условию стабильности орбиты** электрона в бетатроне: в каждый момент времени магнитная индукция B на орбите должна быть равна половине средней магнитной индукции $B_{ср}$, вычисленной для площади, охватываемой контуром орбиты:

$$B = B_{ср}/2. \qquad (21.9)$$

4. Чтобы обеспечить устойчивость орбиты электрона, общая протяженность пути которого в бетатроне измеряется тысячами километров, необходимо выполнить два условия. Во-первых, вся орбита должна лежать по возможности в одной плоскости. Во-вторых, следует обеспечить возвращение на стабильную орбиту электронов, случайно сошедших с нее (например, в результате соударений с молекулами газа, не полностью откачанного из вакуумной камеры) в радиальном направлении: к центру окружности или от него. Первое условие, называемое **аксиальной фокусировкой**, достигается сообщением полюсным наконечникам электромагнита специальной формы, обеспечивающей постепенное ослабление магнитного поля в направлении от центра орбиты к периферии (сравните с § 18.5) Для выполнения второго условия, называемого **радиальной фокусировкой**, необходимо, как показывают расчеты, чтобы пространственное распределение магнитного поля обеспечивало его убывание от центра к периферии медленнее, чем $1/r$, где r — расстояние от данной точки поля до его оси симметрии.

§ 21.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

1. Максвелл обобщил закон полного тока [см. § 20.5], имеющий вид [см. (20.24) и (20.28)]

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{макро} + I_{микро}), \qquad (21.10)$$

или

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = I_{макро}. \qquad (21.11)$$

где $I_{макро}$ и $I_{микро}$ — результирующие макроток (проводимости и конвекционный) и микроток сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур L. Максвелл предположил, что переменное электрическое поле, подобно электрическому току, является источником магнитного поля.