$$mv = er\frac{B_{\text{ср}}}{2}. \quad (21.8)$$

Сопоставим это выражение с формулой (18.19), определяющей радиус r кривизны стабильной траектории электрона в магнитном поле, направленном перпендикулярно ее плоскости:

$$mv = erB.$$

Сравнение двух последних выражений приводит к следующему **условию стабильности орбиты** электрона в бетатроне: в каждый момент времени магнитная индукция B на орбите должна быть равна половине средней магнитной индукции $B_{\text{ср}}$, вычисленной для площади, охватываемой контуром орбиты:

$$B = B_{\text{ср}}/2. \quad (21.9)$$

4. Чтобы обеспечить устойчивость орбиты электрона, общая протяженность пути которого в бетатроне измеряется тысячами километров, необходимо выполнить два условия. Во-первых, вся орбита должна лежать по возможности в одной плоскости. Во-вторых, следует обеспечить возвращение на стабильную орбиту электронов, случайно сошедших с нее (например, в результате соударений с молекулами газа, не полностью откачанного из вакуумной камеры) в радиальном направлении: к центру окружности или от него. Первое условие, называемое **аксиальной фокусировкой**, достигается сообщением полюсным наконечникам электромагнита специальной формы, обеспечивающей постепенное ослабление магнитного поля в направлении от центра орбиты к периферии (сравните с § 18.5) Для выполнения второго условия, называемого **радиальной фокусировкой**, необходимо, как показывают расчеты, чтобы пространственное распределение магнитного поля обеспечивало его убывание от центра к периферии медленнее, чем $1/r$, где r — расстояние от данной точки поля до его оси симметрии.

§ 21.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

1. Максвелл обобщил закон полного тока [см. § 20.5], имеющий вид [см. (20.24) и (20.28)]

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}), \quad (21.10)$$

или

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = I_{\text{макро}}, \quad (21.11)$$

где $I_{\text{макро}}$ и $I_{\text{микро}}$ — результирующие макроток (проводимости и конвекционный) и микроток сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур L. Максвелл предположил, что переменное электрическое поле, подобно электрическому току, является источником магнитного поля.

2. Для количественной характеристики «магнитного действия» переменного электрического поля Максвелл ввел понятие тока смещения. По теореме Остроградского — Гаусса (6.10), поток смещения сквозь замкнутую поверхность S

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{своб}},$$

где $q_{\text{своб}}$ — алгебраическая сумма свободных электрических зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \tag{21.12}$$

Если поверхность S неподвижна и не деформируется, то изменение во времени потока смещения сквозь поверхность S вызывается только изменением электрического смещения $\mathbf{D}$ с течением времени. Поэтому полную производную, стоящую в правой части уравнения (21.12), можно заменить частной производной по времени и дифференцирование внести под знак интеграла:

$$\frac{dq}{dt} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \tag{21.13}$$

Правая часть этой формулы имеет размерность силы тока. Из сравнения (21.13) с формулой (8.4), связывающей силу тока I и плотность $\mathbf{j}$ тока проводимости:

$$I = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S},$$

следует, что $\partial\mathbf{D}/\partial t$ имеет размерность плотности тока. Поэтому Максвелл предложил назвать $\partial\mathbf{D}/\partial t$ **плотностью тока смещения:**

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{21.14}$$

Плотность тока смещения в данной точке пространства равна скорости изменения вектора электрического смещения в этой точке.

Током смещения сквозь произвольную поверхность S называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$I_{\text{смещ}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{смещ}} d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}. \tag{21.15}$$

3. Введя представление о токе смещения, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей электрического тока. Как известно (см. § 8.2), цепи постоянного тока должны быть замкнутыми. До Максвелла считалось, что это условие не обязательно для переменных токов. Например, при зарядке и разрядке конденсатора электри-

ческий ток протекает по проводнику, соединяющему обкладки, и не проходит через диэлектрик, находящийся между обкладками, т. е. цепь не замкнута. С точки зрения Максвелла, цепи любых непостоянных токов тоже замкнуты. Замкнутость таких цепей обеспечивается токами смещения, которые «протекают» в тех участках, где нет проводников, например между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки.

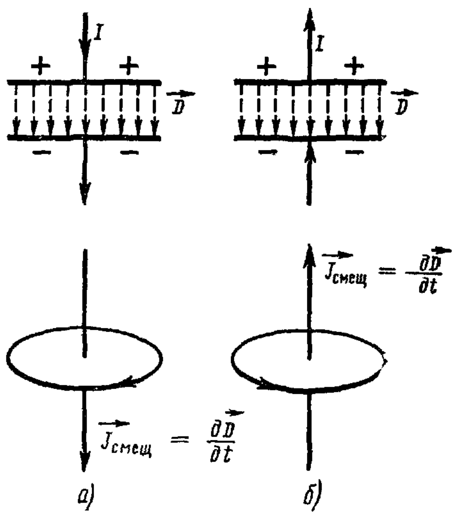

Рис. 21.2

На рис. 21.2 изображены векторы плотностей токов смещения и линии индукции их магнитных полей: а) при зарядке конденсатора (усиление электрического поля); б) при разрядке конденсатора (ослабление электрического поля).

4. Согласно Максвеллу, ток смещения, подобно обычным токам проводимости, является источником вихревого магнитного поля, т. е. такого поля, циркуляция напряженности **H** которого по замкнутому контуру не равна нулю.

В диэлектрике вектор электрического смещения **D**, как известно, состоит из двух слагаемых:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e.$$

Второе слагаемое — вектор поляризации $\mathbf{P}_e$ — характеризует действительное смещение электрических зарядов в неполярных молекулах и поворот полярных молекул, находящихся в единице объема диэлектрика.

Плотность тока смещения в диэлектрике, согласно (21.14), состоит из двух частей:

$$\mathbf{j}_{смещ} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}. \quad (21.16)$$

Второе слагаемое правой части этого выражения $\partial \mathbf{P}_e/\partial t$ представляет собой плотность тока, обусловленного упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов или поворот диполей). Такой ток называется **током поляризации** или **поляризационным током.**

Плотность тока смещения в диэлектрике состоит из плотности **тока смещения в вакууме** $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ и плотности поляризационного тока $\partial \mathbf{P}_e/\partial t$. Поляризационный ток, так же как и ток проводимости, связан с потерей энергии на нагревание диэлектрика при его поляризации. Ток смещения в вакууме н е   в ы д е л я е т   т е п л о т ы. Плотность этого тока тем больше, чем больше скорость измерения напряженности электрического поля.

5. В общем случае токи проводимости и ток смещения не разделены в пространстве, как это имеет место в конденсаторе с переменным напряжением на обкладках. Все типы токов существуют в одном и том же объеме и можно говорить о **полном токе**, равном сумме токов проводимости и конвекционных, а также тока смещения.

Максвелл обобщил закон полного тока, добавив в правую часть уравнения (21.11) ток смещения сквозь поверхность S, натянутую на замкнутый контур L:

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = I_{\text{макро}} + I_{\text{смещ}}. \tag{21.17}$$

Это равенство называется **вторым уравнением Максвелла в интегральной форме.** Оно показывает, что *циркуляция вектора* **H** *напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме макротоков и тока смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур.*

Макроток и ток смещения, входящие в правую часть выражения (21.17), соответственно равны:

$$I_{\text{макро}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{макро}}\, d\mathbf{S}, \quad I_{\text{смещ}} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t},$$

где $\mathbf{j}_{\text{макро}}$ — вектор плотности макротока. Используя эти соотношения, второе уравнение Максвелла (21.17) можно переписать еще в двух эквивалентных формах:

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = I_{\text{макро}} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}, \tag{21.18}$$

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_{\text{полн}}\, d\mathbf{S}. \tag{21.18$'$}$$

Здесь $\mathbf{j}_{\text{полн}}$ — плотность полного тока, равная геометрической сумме плотностей макротока и тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j}_{\text{макро}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{21.19}$$

6. Экспериментальным обоснованием второго уравнения Максвелла являются опыты, в которых обнаруживается магнитное поле тока смещения. Рассмотрим один из них — опыт А. А. Эйхенвальда, изучавшего магнитное поле тока поляризации, представляющего собой часть тока смещения. Диск S из диэлектрика помещен между двумя обкладками плоского конденсатора и вращается вокруг оси OO' (рис. 21.3). Каждая обкладка конденсатора разделена на две пластины (a, c и b, d), соединенные между собой, как показано на рисунке. Вследствие этого обе половины диэлектрика, помещенного между обкладками, поляризованы в противоположных направлениях. Во время вращения

диэлектрика направление вектора поляризации в каждой из его частей изменяется на противоположное при переходе от пары пластин a, b к паре пластин c, d. Поэтому при вращении диэлектрика в нем возникает ток поляризации, направленный параллельно оси вращения. Магнитное поле этого тока обнаруживается по его действию на магнитную стрелку, помещенную вблизи диска (на рис. 21.3 не показана).

7. Для области электромагнитного поля, в которой нет макротоков, соотношения (21.2) и (21.18) имеют почти симметричный вид:

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad \oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \tag{21.20}$$

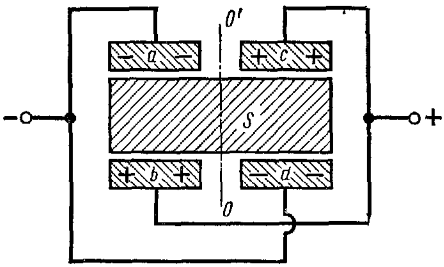

Рис. 21.3

и отличаются лишь знаками при производных в правых частях. Из сравнения двух уравнений Максвелла (21.20) можно сделать следующие важные выводы:

а) между электрическим и магнитным полями существует тесная взаимная связь: изменение во времени электрического поля вызывает появление магнитного поля, а переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля[1];

б) знаки при скоростях изменения потоков магнитной индукции и электрического смещения в обоих уравнениях Максвелла[2] различны, причем направления $\partial\mathbf{D}/\partial t$ и $\mathbf{H}$ образуют «правовинтовую» систему (рис. 21.4), тогда как направления $\partial\mathbf{B}/\partial t$ и $\mathbf{E}$ образуют левовинтовую систему (рис. 21.5). Различия в знаках правых частей уравнений Мак-

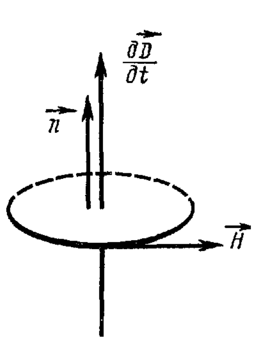

Рис 21.4

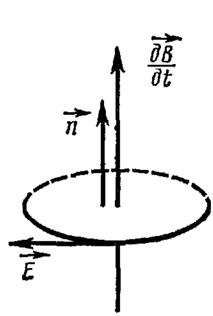

Рис. 21.5

[1] Не следует забывать, что магнитное поле всегда является вихревым.

[2] Нумерация уравнений Максвелла условна. Часто уравнение (21.18) называют первым, а (21.2) — вторым уравнением Максвелла.

свелла соответствуют требованиям закона сохранения энергии и закона Ленца. В случае одинаковых знаков при $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ бесконечно малое увеличение одного из полей вызывало бы неограниченное возрастание обоих полей, а бесконечно малое уменьшение одного из полей влекло бы за собой полное исчезновение этих полей. Различные знаки при $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ в правых частях уравнений Максвелла являются необходимым условием существования устойчивого электромагнитного поля.

§ 21.4. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

1. Рассмотрим остальные уравнения, входящие в полную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Третье уравнение Максвелла выражает теорему Остроградского—Гаусса для потока вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S, охватывающую суммарный свободный заряд $q_{\text{своб}}$:

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = q_{\text{своб}}. \tag{21.21}$$

Эта теорема была доказана в § 2.4 и § 6.3 для электростатического поля. Максвелл обобщил теорему Остроградского — Гаусса, предположив, что она [в форме соотношения (21.21)] справедлива как для стационарного, так и для переменного электрического поля.

Четвертое уравнение Максвелла является обобщением теоремы Остроградского — Гаусса (16.15) на переменное магнитное поле:

$$\oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0. \tag{21.22}$$

2. Рассмотренные нами четыре уравнения Максвелла недостаточны для расчета электромагнитного поля в веществе. К ним нужно добавить уравнения, характеризующие электрические и магнитные свойства среды, в которой создано электромагнитное поле. Если среда изотропна, а все макротоки — токи проводимости в проводниках, подчиняющиеся закону Ома, то дополнительные уравнения имеют вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_{\text{макро}} = \gamma\mathbf{E}. \tag{21.23}$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающих электромагнитное поле, состоит из четырех уравнений Максвелла (21.2), (21.18), (21.21), (21.22) и соотношений (21.23)[1].

3. Теория Максвелла является макроскопической теорией (см. § 21.1). Поэтому в ней не могли быть вскрыты зависимости характе-

[1] Строго говоря, для получения однозначного решения эту систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.