свелла соответствуют требованиям закона сохранения энергии и закона Ленца. В случае одинаковых знаков при $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ бесконечно малое увеличение одного из полей вызывало бы неограниченное возрастание обоих полей, а бесконечно малое уменьшение одного из полей влекло бы за собой полное исчезновение этих полей. Различные знаки при $\partial \mathbf{B}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ в правых частях уравнений Максвелла являются необходимым условием существования устойчивого электромагнитного поля.

§ 21.4. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

1. Рассмотрим остальные уравнения, входящие в полную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Третье уравнение Максвелла выражает теорему Остроградского—Гаусса для потока вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S, охватывающую суммарный свободный заряд $q_{\text{своб}}$:

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = q_{\text{своб}}. \tag{21.21}$$

Эта теорема была доказана в § 2.4 и § 6.3 для электростатического поля. Максвелл обобщил теорему Остроградского — Гаусса, предположив, что она [в форме соотношения (21.21)] справедлива как для стационарного, так и для переменного электрического поля.

Четвертое уравнение Максвелла является обобщением теоремы Остроградского — Гаусса (16.15) на переменное магнитное поле:

$$\oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0. \tag{21.22}$$

2. Рассмотренные нами четыре уравнения Максвелла недостаточны для расчета электромагнитного поля в веществе. К ним нужно добавить уравнения, характеризующие электрические и магнитные свойства среды, в которой создано электромагнитное поле. Если среда изотропна, а все макротоки — токи проводимости в проводниках, подчиняющиеся закону Ома, то дополнительные уравнения имеют вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_{\text{макро}} = \gamma\mathbf{E}. \tag{21.23}$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающих электромагнитное поле, состоит из четырех уравнений Максвелла (21.2), (21.18), (21.21), (21.22) и соотношений (21.23)[1].

3. Теория Максвелла является макроскопической теорией (см. § 21.1). Поэтому в ней не могли быть вскрыты зависимости характе-

---

[1] Строго говоря, для получения однозначного решения эту систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

ристик вещества ε, μ и γ от его молекулярного строения. Теория Максвелла охватила огромный круг экспериментальных фактов, описывающих электрические и магнитные поля макроскопических зарядов и токов, но не смогла объяснить тех явлений, где сказывается внутреннее строение вещества, например физических процессов в диэлектриках и магнетиках.

Дальнейшим развитием теории электромагнитного поля Максвелла явилась электронная теория, созданная Г. А. Лоренцем. Лоренц показал, что электрические и магнитные свойства вещества определяются характером движений и взаимодействий электрических зарядов, из которых состоят его атомы и молекулы. Эти вопросы были подробно рассмотрены в гл. VI, XX.

По теории Лоренца, все многообразие электрических и магнитных явлений объясняется определенным расположением и взаимодействием зарядов и токов, находящихся в неподвижном эфире[1]. В каждой точке пространства существуют, согласно электронной теории, некоторое электрическое поле с напряженностью $\mathfrak{e}$ и магнитное поле с напряженностью $\mathfrak{h}$, появляющиеся в результате действия всех токов и зарядов. Эти так называемые микрополя подчиняются системе уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла. Путем усреднения уравнений электронной теории можно перейти к уравнениям Максвелла для макроскопических полей. При этом оказывается, что векторы **E** и **B**, характеризующие поля макроскопических зарядов и токов, являются усредненными значениями напряженностей микроскопических полей $\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{h}$:

$$\mathbf{E} = \widetilde{\mathfrak{e}}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \widetilde{\mathfrak{h}}, \qquad (21.24)$$

где знаком «$\sim$» обозначено усреднение, о котором шла речь в § 21.1.

Векторы **D** и **H** оказываются связанными с $\widetilde{\mathfrak{e}}$ и $\widetilde{\mathfrak{h}}$ и с векторами поляризации $\mathbf{P}_e$ и намагниченности **J** соотношениями, которые были получены в гл. VI и XX:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{J}.$$

В электронной теории Лоренца получила свое объяснение зависимость электрических и магнитных характеристик вещества от их молекулярного строения. Изложение нашего курса по электричеству и электромагнитным явлениям основывалось на идеях и достижениях электронной теории. Свое дальнейшее развитие электродинамика Максвелла — Лоренца получила в квантовой физике Частично мы уже применяли некоторые результаты квантовой физики в гл. XIII и XX.

4. С помощью уравнений Максвелла для электромагнитного поля можно найти соотношения между касательными и нормальными составляющими векторов напряженностей электрического **E** и магнитного

---

[1] Вопрос об эфире рассмотрен в третьем томе курса.

H полей на границе раздела двух разнородных диэлектриков. Эти соотношения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau}, \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \end{aligned}\right\} \qquad (21.25)$$

где ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 — относительные диэлектрические и магнитные проницаемости соответственно первой и второй сред, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — векторы напряженностей полей в обеих средах, а $E_{i\tau}$, $H_{i\tau}$ и E_{in}, H_{in} — проекции этих векторов соответственно на касательную плоскость и общую нормаль к границе раздела двух сред.

5. Для вывода первого соотношения (21.25) рассмотрим небольшой замкнутый прямоугольный контур *1-2-3-4-1* (рис. 21.6), стороны *1-2* и *3-4* которого параллельны малому участку *ab* границы раздела сред. Плоскость контура выбрана так, чтобы векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ лежали в этой плоскости. По первому уравнению Максвелла (21.20) циркуляция вектора $\mathbf{E}$ вдоль этого контура L равна

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n\,dS$$

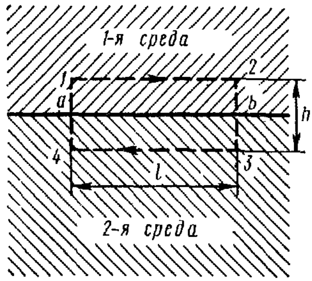

Рис. 21.6

или

$$\int_1^2 \mathbf{E}_1\,d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E}\,d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E}_2\,d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n\,dS, \qquad (21.26)$$

где B_n — проекция вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ на нормаль к плоскости контура, $S = lh$ — площадь поверхности, ограниченной контуром, Φ_m — магнитный поток сквозь эту поверхность.

Будем теперь уменьшать высоту h прямоугольника так, чтобы точки *1* и *4* неограниченно приближались к точке a, а точки *2* и *3* — к точке b. Тогда

$$\lim_{h\to 0}\int_2^3 \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \lim_{h\to 0}\int_4^1 \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_b^b \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} S = 0, \quad \lim_{h\to 0}\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n\,dS = 0,$$

$$\lim_{h\to 0}\int_1^2 \mathbf{E}_1\,dl = \int_a^b \mathbf{E}_1\,dl = \int_a^b E_{1\tau}\,dl$$

$$\lim_{h\to 0}\int_3^4 \mathbf{E}_2\,dl = \int_b^a \mathbf{E}_2\,dl = \int_b^a E_{2\tau}\,dl.$$

Поэтому уравнение (21.26) в пределе при $h \to 0$ примет вид

$$\int_a^b \left(E_{1\tau} - E_{2\tau}\right) dl = 0. \qquad (21.26')$$

Так как точки a и b выбраны на поверхности раздела двух сред совершенно произвольно, то условие (21.26′) может выполняться только в том случае, если подынтегральная функция тождественно равна нулю, т. е. если выполняется первое соотношение (21.25).

Третье условие (21.25) можно получить аналогичным образом, если исходить из второго уравнения Максвелла (21.20):

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S D_n\, dS,$$

где D_n — проекция вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ на нормаль к границе раздела двух сред.

6. Для вывода второго соотношения (21.25) рассмотрим замкнутую цилиндрическую поверхность, основания *1-2* и *3-4* которой параллельны поверхности раздела двух сред и находятся по разные стороны от нее, а образующие перпендикулярны ей (рис. 21.7). Пусть этот цилиндр вырезает на поверхности раздела небольшой участок ab площадью ΔS

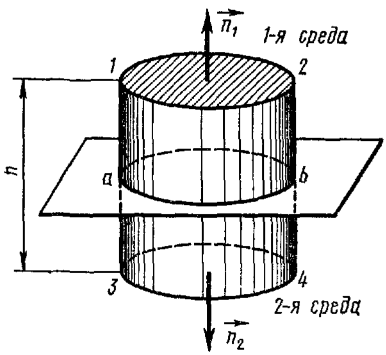

Рис. 21.7

По третьему уравнению Максвелла (21.21) поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен нулю:

$$\oint_S D_n\, dS = 0 \quad \text{или} \quad \oint_S \mathbf{D}\mathbf{n}\, dS = 0,$$

где $D_n = \mathbf{D}\mathbf{n}$ — проекция вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ на направление вектора единичной внешней нормали $\mathbf{n}$ к элементу dS замкнутой поверхности S. Учитывая, что для изотропных диэлектриков $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon\, \mathbf{E}$, где ε_0 — электрическая постоянная, можем переписать последнее уравнение в форме

$$\oint_S \varepsilon\, \mathbf{E}\mathbf{n}\, dS = 0. \qquad (21.27)$$

Стоящий слева интеграл можно представить в виде суммы трех интегралов, соответствующих верхнему и нижнему основаниям цилиндра и его боковой поверхности:

$$\int_{S_{\text{верх}}} \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{n}_1\, dS + \int_{S_{\text{нижн}}} \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{n}_2\, dS + \int_{S_{\text{бок}}} \varepsilon\, \mathbf{E}\mathbf{n}\, dS = 0.$$

Будем теперь уменьшать высоту h цилиндра так, чтобы его верхнее и нижнее основания неограниченно приближались к участку ab поверхности раздела сред. Тогда

$$\lim_{h\to 0} \int_{S_{\text{верх}}} \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{n}_1\, dS = \int_{\Delta S} \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{n}_1\, dS,$$

$$\lim_{h\to 0} \int_{S_{\text{нижн}}} \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{n}_2\, dS = \int_{\Delta S} \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{n}_2\, dS,$$

$$\lim_{h\to 0} \int_{S_{\text{бок}}} \varepsilon\, \mathbf{E}\mathbf{n}\, dS = 0, \quad \text{так как} \quad \lim_{h\to 0} S_{\text{бок}} = 0.$$

Следовательно, в пределе при $h \to 0$ уравнение (21.27) будет иметь вид

$$\int\limits_{\Delta S} [\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{n}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{n}_2]\, dS = 0. \qquad (21.27')$$

Нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ направлены во взаимно противоположные стороны ($\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$). Для участка поверхности ΔS, по которому производится интегрирование, естественно выбрать какое-нибудь одно направление нормали $\mathbf{n}$, например $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$. Тогда $\mathbf{E}_1\mathbf{n}_1 = -\mathbf{E}_1\mathbf{n} = -E_{1n}$, $\mathbf{E}_2\mathbf{n}_2 = \mathbf{E}_2\mathbf{n} = E_{2n}$ и уравнение (21.27′) можно представить в виде

$$\int\limits_{\Delta S} (\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n})\, dS = 0.$$

Так как участок ΔS выбран на поверхности раздела двух сред совершенно произвольно, то это равенство может выполняться только при условии

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 0,$$

совпадающем со вторым соотношением (21.25).

Четвертое условие (21.25) можно получить аналогичным образом, воспользовавшись четвертым уравнением Максвелла (21.22).

Вопросы для повторения

1. В чем состоит обобщение закона электромагнитной индукции, сделанное Максвеллом?
2. Поясните принцип действия бетатрона.
3. Что называется током смещения? Каково его магнитное действие и как его можно обнаружить?
4. Напишите выражение обобщенного закона полного тока.
5. Какова взаимосвязь между переменными электрическим и магнитным полями?
6. Напишите полную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Примеры решения задач

Задача 21.1. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника э.д.с. Доказать, что ток смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равен току в цепи источника э.д.с. Искажениями поля у концов конденсатора пренебречь.

Р е ш е н и е. Для определенности предположим, что внутренняя обкладка конденсатора заряжается положительно. Проведем в диэлектрике цилиндрическое сечение радиуса r. Обозначим его площадь через S. Ток смещения сквозь это сечение диэлектрика, по формуле (21.15),

$$I_{\text{смещ}} = \int\limits_S \frac{\partial D_n}{\partial t}\, dS, \qquad (a)$$

где D_n— проекция вектора $\mathbf{D}$ электрического смещения поля конденсатора на направление внешней нормали $\mathbf{n}$ к элементу сечения dS. Вектор $\mathbf{n}$ направлен по радиусу цилиндра S от его оси к элементу dS. Точно так же направлен и вектор $\mathbf{D}$ в точках площадки dS. Поэтому $D_n = D$. По формуле (3.26) имеем

$$D_n = D = \tau/2\pi r,$$

где τ — линейная плотность зарядов на внутренней обкладке конденсатора. Если заряд этой обкладки равен q, а ее высота l, то

$$\tau = q/l \quad \text{и} \quad D_n = q/2\pi r l.$$