Глава XXII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 22.1. Колебательный контур

1. Рассмотрим электрическую цепь (рис. 22.1), состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью C, соленоидальной катушки с индуктивностью L, резистора сопротивлением R и ключа K. Если при разомкнутом ключе K конденсатор зарядить до разности потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, а затем замкнуть ключ, то конденсатор начнет разряжаться и в цепи возникнет ток I, изменяющийся с течением времени.

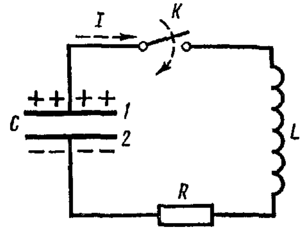

Рис. 22.1

Оказывается, что если размеры этой цепи не слишком велики, а емкость конденсатора и индуктивность катушки не слишком малы, то можно считать, что в каждый момент времени сила тока во всех сечениях этой цепи одинакова. Поэтому мгновенные значения I силы переменного тока должны удовлетворять всем законам, установленным выше для цепей постоянного тока. Такие переменные токи называют **квазистационарными**.

Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Поэтому переменный ток с периодом T в электрической цепи длиной l можно считать квазистационарным, если выполнено условие: $T \gg l/c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Найдем зависимость силы квазистационарного тока от времени для цепи, изображенной на рис. 22.1, причем для простоты будем считать, что электрические сопротивления катушки L, соединительных проводов и ключа равны нулю.

По закону Ома (9.9) для участка цепи $1LR2$ имеем

$$IR = \Delta\varphi + \mathscr{E}, \tag{22.1}$$

где I, $\Delta\varphi$ и $\mathscr{E}$ — мгновенные значения соответственно силы тока в цепи, разности потенциалов между обкладками 1 и 2 конденсатора и алгебраической суммы э. д. с., приложенных на рассматриваемом участке цепи. На участке цепи $1LR2$ приложена только э. д. с. самоиндукции, возникающая в катушке при протекании по ней переменного тока. Поэтому

$$\mathscr{E} = -L\,(dI/dt)$$

и уравнение (22.1) примет вид

$$IR = \Delta\varphi - L\,(dI/dt). \tag{22.2}$$

Обозначим заряд первой обкладки конденсатора через q. Тогда сила тока в цепи

$$I = -\frac{dq}{dt} \text{ и } \frac{dI}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}. \qquad (22.3)$$

Знак минус в формулах (22.3) введен потому, что положительному направлению тока I, принятому при составлении уравнения (22.1) и указанному на рис. 22.1, соответствует у б ы в а н и е положительного заряда первой обкладки конденсатора $[(dq/dt) < 0]$. Разность потенциалов между обкладками конденсатора по формуле (5.6) равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = q/C. \qquad (22.4)$$

Подставив выражения (22.3) и (22.4) в (22.2), получим

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \qquad (22.5)$$

2. По своей форме это дифференциальное уравнение аналогично дифференциальному уравнению свободных затухающих колебаний груза, подвешенного на пружине [см. т. I, уравнение (8.27)]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (22.6)$$

Аналогом массы m груза является индуктивность L цепи, аналогом коэффициента сопротивления r — сопротивление R цепи, а аналогом коэффициента упругости пружины k — величина, обратная емкости.

Решение уравнения (22.6), как видно из § 8.5 первого тома курса, имеет следующий вид:

$$x = A_0 e^{-(r/2m)t} \sin(\omega t + \alpha_0), \qquad (22.7)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \qquad (22.8)$$

— циклическая частота затухающих колебаний груза на пружине, A_0 и α_0 — начальные значения амплитуды и фазы.

Заменив в (22.7) и (22.8) m, r и k соответственно на L, R и $1/C$, найдем решение дифференциального уравнения (22.5):

$$q = A_0 e^{-(R/2L)t} \sin(\omega t + \alpha_0), \qquad (22.9)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \qquad (22.10)$$

Таким образом, при замыкании заряженного конденсатора на цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности и резистора, заряд на обкладках конденсатора совершает **затухающие колебания**. Поэтому изображенная на рис. 21.1 цепь получила название **колебательного контура**.

Величина

$$\beta = R/2L \tag{22.11}$$

называется **коэффициентом затухания.**

Амплитуда A колебаний заряда q конденсатора, как видно из (22.9), равна

$$A = A_0\, e^{-(R/2L)t} = A_0\, e^{-\beta t}. \tag{22.12}$$

3. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсатора пропорциональна q [см. (22.4)]. Поэтому

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{A_0}{C}\, e^{-(R/2L)t} \sin(\omega t + \alpha_0). \tag{22.13}$$

Из формул (22.3) и (22.9) найдем следующее выражение для силы тока в колебательном контуре:

$$I = -\frac{dq}{dt} = A_0\, e^{-(R/2L)t}\left[\frac{R}{2L}\sin(\omega t + \alpha_0) - \omega\cos(\omega t + \alpha_0)\right]. \tag{22.14}$$

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) заряд конденсатора $q = q_0$ и ток в цепи отсутствует. Тогда из (22.9) и (22.14) имеем

$$A_0 \sin\alpha_0 = q_0,$$

$$\frac{R}{2L}\sin\alpha_0 - \omega\cos\alpha_0 = 0,$$

откуда для начальной фазы α_0 и начальной амплитуды A_0 получим следующие выражения:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{\omega}{R/2L} = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1},$$

$$A_0 = q_0\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} = q_0\Big/\sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}.$$

Таким образом, начальные фаза и амплитуда колебаний в контуре существенным образом зависят от его параметров: емкости, индуктивности и сопротивления.

4. Период затухающих колебаний в колебательном контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\Big/\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{22.15}$$

С увеличением сопротивления R контура период колебаний в нем возрастает и при $R = 2\sqrt{L/C}$ обращается в бесконечность При $R > 2\sqrt{L/C}$ выражение (22.9) уже не является решением дифференциального уравнения (22.5) и процессы, происходящие в контуре при разряде конденсатора, не носят периодического характера. Такой разряд конденсатора называется **апериодическим.** В этом случае решение дифференциального уравнения (22.5) имеет вид

$$q = A_0\, e^{-\beta t}\, e^{i\omega t} = A_0\, e^{-(\beta - i\omega)t}. \tag{22 16}$$

Действительно, из (22.16) следует, что

$$\frac{dq}{dt} = -(\beta - i\omega)\, q \quad \text{и} \quad \frac{d^2q}{dt^2} = (\beta - i\omega)^2 q.$$

Подставляя эти выражения в (22.5), получаем

$$L(\beta - i\omega)^2 q - R(\beta - i\omega)\, q + \frac{1}{C} q = 0$$

или

$$L(\beta^2 - \omega^2) - R\beta + \frac{1}{C} - i(2L\beta\omega - R\omega) = 0.$$

Комплексное число равно нулю только тогда, когда его действительная и мнимая части порознь равны нулю. Поэтому можно написать следующие два равенства:

$$2L\beta\omega - R\omega = 0 \quad \text{и} \quad L(\beta^2 - \omega^2) - R\beta + \frac{1}{C} = 0,$$

которые действительно выполняются, если

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Таким образом, при апериодическом разряде заряд конденсатора изменяется по закону

$$q = A_0 e^{-(\beta - i\omega)t} = A_0 e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} \tag{22.17}$$

Обозначим начальный заряд конденсатора (при $t = 0$) через q_0. Тогда $A_0 = q_0$ и формулу (22.17) можно записать в таком виде:

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right)t}. \tag{22.17'}$$

5. Переменный электрический ток в контуре вызывает появление переменного магнитного поля. Одновременно с этим изменяется и электрическое поле конденсатора. Поэтому рассмотренные нами свободные колебания заряда конденсатора и тока в контуре называют **свободными электромагнитными колебаниями.** Энергия этих колебаний в начальный момент времени равна энергии электрического поля конденсатора. Затем энергия электромагнитных колебаний в контуре постепенно уменьшается, так как в процессе прохождения электрического тока выделяется ленц-джоулево тепло. Происходит «рассеяние» энергии электромагнитных колебаний, и последние затухают.

6. Если сопротивление R контура постепенно уменьшать, то затухание колебаний в нем также уменьшается. В пределе при $R = 0$ свободные электромагнитные колебания в контуре становятся н е з а т у х а ю щ и м и. В этом случае заряд конденсатора, разность потенциалов между его обкладками и сила тока в цепи изменяются по сле-

дующим законам, полученным из выражений (22.10), (22.9), (22.13) и (22.14) при $\beta = 0$:

$$\left.\begin{aligned} q &= A_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0), \\ \Delta\varphi &= (A_0/C)\sin(\omega_0 t + \alpha_0), \\ I &= -A_0\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha_0), \end{aligned}\right\} \tag{22.18}$$

где

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \tag{22.19}$$

— циклическая частота свободных незатухающих электромагнитных колебаний в контуре.

Период свободных незатухающих колебаний

$$T = (2\pi/\omega_0) = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{22.20}$$

Эта формула впервые была получена в 1853 г. В. Томсоном и называется **формулой Томсона**.

7. Преобразуем выражение (22.18) для силы тока в колебательном контуре:

$$I = -A_0\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha_0) = A_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha_0 - \pi/2). \tag{22.18'}$$

Из формул (22.18) и (22.18′) следует, что сила тока отстает по фазе от разности потенциалов между обкладками конденсатора на $\pi/2$. Амплитуда I_0 силы тока и амплитуда $\Delta\varphi_0$ разности потенциалов обкладок конденсатора равны:

$$I_0 = A_0\omega_0 = \frac{A_0}{\sqrt{LC}}, \qquad \Delta\varphi_0 = \frac{A_0}{C},$$

поэтому

$$I_0 = \Delta\varphi_0\sqrt{C/L}$$

Величина $\sqrt{L/C}$ называется **волновым сопротивлением** контура.

8. Рассмотрим подробнее процессы, происходящие при незатухающих свободных колебаниях в контуре. Пусть в начальный момент времени (рис. 22.2,*а*) заряд конденсатора максимален ($q = q_0$). При этом разность потенциалов между его обкладками тоже максимальна ($\Delta\varphi = \Delta\varphi_0$), а сила тока в цепи отсутствует ($I = 0$). Затем начинается разряд конденсатора. Вследствие явления самоиндукции ток в контуре постепенно увеличивается и достигает максимального значения ($I = I_0$) в момент $t = T/4$, когда $q = C\Delta\varphi = 0$ (рис. 22.2,*б*). Далее ток в цепи, сохраняя свое направление, постепенно уменьшается по вели-

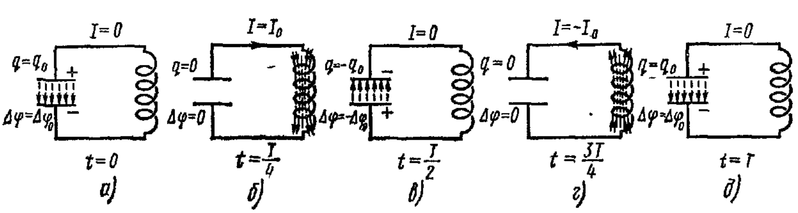

Рис. 22.2

чине, обращаясь в нуль при $t = T/2$ (рис. 22.2,*в*). При этом заряд конденсатора и разность потенциалов между его обкладками вновь достигают максимальных значений. Однако знаки зарядов пластин и направление электрического поля между ними противоположны тем, какие были в начальный момент времени. Таким образом, в результате явления самоиндукции происходит перезарядка конденсатора. Затем процессы идут в обратном направлении (рис. 22.2,*г*, *д*).

В § 8.2 т. I было показано, что при незатухающих свободных колебаниях механических систем происходит периодический переход кинетической энергии в потенциальную. Аналогично этому при свободных незатухающих электромагнитных колебаниях в контуре имеет место периодический переход энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля электрического тока. В моменты $t = 0$, $T/2$, T и т. д. энергия электрического поля максимальна и равна $C(\Delta\varphi_0)^2/2$; энергия же магнитного поля равна нулю, так как тока в цепи нет. Наоборот, в моменты $t = T/4$, $3T/4$ и т. д. энергия магнитного поля максимальна и равна $LI_0^2/2$; энергия же электрического поля равна нулю, так как конденсатор полностью разряжен. В случае свободных незатухающих колебаний сумма энергий электрического и магнитного полей колебательного контура, представляющая собой полную энергию электромагнитных колебаний, остается постоянной. Поэтому

$$\frac{C(\Delta\varphi_0)^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \quad \text{и} \quad I_0 = \Delta\varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

§ 22.2. Вынужденные электромагнитные колебания

1. Электрическое сопротивление R любого реального колебательного контура отлично от нуля. Поэтому свободные электромагнитные колебания в контуре постепенно затухают. Для получения незатухающих электромагнитных колебаний необходимо извне подводить энергию, компенсирующую потери на ленц-джоулево тепло. В этом случае мы будем иметь дело уже не со свободными, а с **вынужденными электромагнитными колебаниями.** Для осуществления таких колебаний необходимо включить в колебательный контур источник электрической энергии, э. д. с. которого периодически изменяется (рис. 22.3). Будем предполагать, что внутреннее сопротивление этого источника энергии равно нулю, так что его включение в рассматриваемый контур не изменяет свойств последнего[1].

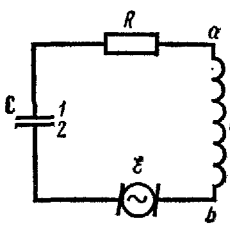

Рис. 22.3

2. Рассмотрим простейший случай вынужден-

[1] Источник электрической энергии, характеризующийся величиной э.д.с. и внутренним сопротивлением, называют в электротехнике источником напряжения.