

чине, обращаясь в нуль при $t = T/2$ (рис. 22.2, в). При этом заряд конденсатора и разность потенциалов между его обкладками вновь достигают максимальных значений. Однако знаки зарядов пластин и направление электрического поля между ними противоположны тем, какие были в начальный момент времени. Таким образом, в результате явления самоиндукции происходит перезарядка конденсатора. Затем процессы идут в обратном направлении (рис. 22.2, г, д).

В § 8.2 т. I было показано, что при незатухающих свободных колебаниях механических систем происходит периодический переход кинетической энергии в потенциальную. Аналогично этому при свободных незатухающих электромагнитных колебаниях в контуре имеет место периодический переход энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля электрического тока. В моменты $t = 0, T/2, T$ и т. д. энергия электрического поля максимальна и равна $C(\Delta\varphi_0)^2/2$; энергия же магнитного поля равна нулю, так как тока в цепи нет. Наоборот, в моменты $t = T/4, 3T/4$ и т. д. энергия магнитного поля максимальна и равна $LI_0^2/2$; энергия же электрического поля равна нулю, так как конденсатор полностью разряжен. В случае свободных незатухающих колебаний сумма энергий электрического и магнитного полей колебательного контура, представляющая собой полную энергию электромагнитных колебаний, остается постоянной. Поэтому

$$\frac{C(\Delta\varphi_0)^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \quad \text{и} \quad I_0 = \Delta\varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

§ 22.2. Вынужденные электромагнитные колебания

1. Электрическое сопротивление R любого реального колебательного контура отлично от нуля. Поэтому свободные электромагнитные колебания в контуре постепенно затухают. Для получения незатухающих электромагнитных колебаний необходимо извне подводить энергию, компенсирующую потери на лент-джоулево тепло. В этом случае мы будем иметь дело уже не со свободными, а с

вынужденными электромагнитными колебаниями. Для осуществления таких колебаний необходимо включить в колебательный контур источник электрической энергии, э. д. с. которого периодически изменяется (рис. 22.3). Будем предполагать, что внутреннее сопротивление этого источника энергии равно нулю, так что его включение в рассматриваемый контур не изменяет свойств последнего¹.

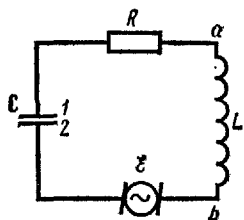


Рис. 22.3

2. Рассмотрим простейший случай вынужден-

¹ Источник электрической энергии, характеризующийся величиной э. д. с. и внутренним сопротивлением, называют в электротехнике источником напряжения.

ных электромагнитных колебаний в контуре, происходящих под действием синусоидальной э. д. с.:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t, \quad (22.21)$$

где \mathcal{E}_0 — амплитуда э. д. с., Ω — циклическая частота. Этот случай в то же время является и достаточно общим, так как по теореме Фурье любую непрерывную периодическую функцию $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ можно представить в виде суммы (конечной или бесконечной) простых синусоидальных функций, имеющих различные амплитуды, начальные фазы и циклические частоты.

Для получения дифференциального уравнения вынужденных электромагнитных колебаний необходимо в законе Ома (22.1) заменить \mathcal{E} суммой вынуждающей э. д. с. (22.21) и э. д. в. самоиндукции:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -\mathcal{E}_0 \sin \Omega t. \quad (22.22)$$

Полное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (22.22) равно сумме полного решения соответствующего однородного линейного уравнения [выражение (22.9)] и частного решения уравнения (22.22). Величина первого члена этой суммы обычно быстро убывает с течением времени, так как он характеризует свободные затухающие колебания в контуре. Поэтому вскоре после начала колебаний влиянием этого члена можно пренебречь. Частное решение уравнения (22.22) будем искать в форме

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_0 \sin(\Omega t + \alpha). \quad (22.23)$$

Задача состоит в отыскании таких значений амплитуды тока I_0 и начальной фазы α , чтобы выражение (22.23) обращало уравнение (22.22) в тождество. Из (22.23) следует, что

$$\begin{aligned} q &= \frac{I_0}{\Omega} \cos(\Omega t + \alpha) = -\frac{I_0}{\Omega} \sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{dq}{dt} &= -I_0 \sin(\Omega t + \alpha), \\ \frac{d^2 q}{dt^2} &= -I_0 \Omega \cos(\Omega t + \alpha) = -I_0 \Omega \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения для q , $\frac{dq}{dt}$ и $\frac{d^2 q}{dt^2}$ в (22.22), получим

$$\begin{aligned} I_0 L \Omega \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + I_0 R \sin(\Omega t + \alpha) + \\ + \frac{I_0}{\Omega C} \sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Левая часть этого тождества представляет собой сумму трех гармонических колебаний одной частоты, но имеющих разные начальные

фазы. Для их сложения удобно воспользоваться методом векторных диаграмм (рис. 22.4), который был уже нами применен при решении аналогичной задачи в механике (см. т. I, § 8.6). Из рис. 22.4 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1/\Omega C) - \Omega L}{R}, \quad (22.24)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + [(1/\Omega C) - \Omega L]^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad (22.25)$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + [(1/\Omega C) - \Omega L]^2}. \quad (22.26)$$

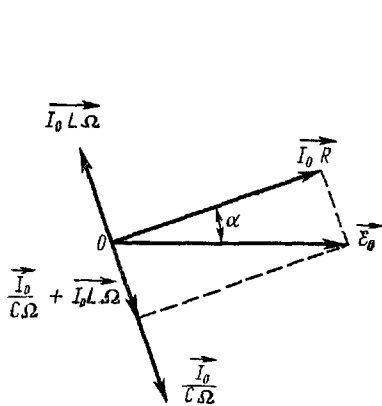


Рис. 22.4

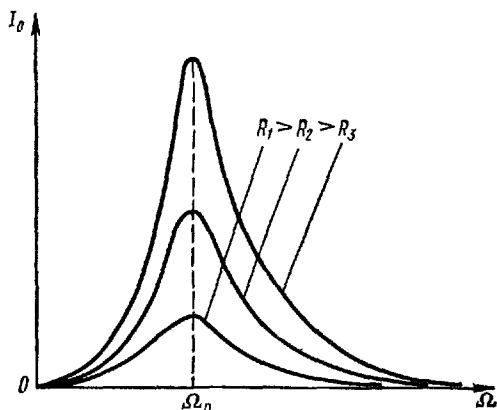


Рис. 22.5

Формула (22.25), показывающая зависимость амплитуды I_0 переменного тока в колебательном контуре от амплитуды \mathcal{E}_0 вынуждающей э. д. с., аналогична закону Ома (9.11) для замкнутой цепи постоянного тока. Поэтому величина Z называется **полным сопротивлением** электрической цепи переменного тока (колебательного контура). Оно складывается из **активного (омического) сопротивления** R , **индуктивного сопротивления** ΩL и **емкостного сопротивления** $1/\Omega C$.

3. Амплитуда силы тока в контуре, как видно из (22.25), зависит не только от параметров контура R , L и C и амплитуды \mathcal{E}_0 вынуждающей э. д. с., но и от циклической частоты Ω .

На рис. 22.5 и 22.6 представлены зависимости амплитуды I_0 силы тока и сдвига фаз α между

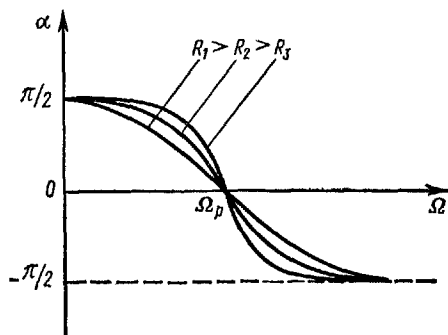


Рис. 22.6

силой тока и вынуждающей э. д. с. от частоты последней при постоянных R, L, C и \mathcal{E}_0 . Независимо от величины R активного сопротивления контура амплитуда силы тока в контуре достигает максимального значения:

$$I_{0 \text{ макс}} = \mathcal{E}_0 / R$$

при одном и том же значении Ω_p циклической частоты вынуждающей э. д. с., равном

$$\Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (22.27)$$

Из (22.26) следует, что при $\Omega = \Omega_p$ полное сопротивление контура минимально и равно его активному сопротивлению. В этом случае $\alpha = 0$, т. е. сила тока совпадает по фазе с вынуждающей э. д. с.

Явление резкого возрастания амплитуды силы тока в колебательном контуре при приближении циклической частоты вынуждающей э. д. с. к значению Ω_p называется **явлением резонанса** в электрической цепи, а частота Ω_p — **резонансной циклической частотой**. Кривая зависимости I_0 от Ω называется **резонансной кривой**.

Из сравнения формул (22.27) и (22.10) видно, что элеќтрический резонанс наступает при частоте вынуждающей э. д. с., несколько большей частоты свободных (затухающих) колебаний в цепи.

4. Найдем разности потенциалов на отдельных участках колебательного контура (см. рис. 22.3) при резонансе. Разность потенциалов $\Delta\varphi_L$ на концах индуктивности L равна э. д. с. самоиндукции:

$$\Delta\varphi_L = \varphi_b - \varphi_a = -L(dI/dt),$$

где I выражается формулой (22.23), в которой $\Omega = \Omega_p$ и $\alpha = 0$:

$$\Delta\varphi_L = -L\Omega_p I_0 \cos \Omega_p t = L\Omega_p I_0 \cos (\Omega_p t + \pi).$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\Delta\varphi_C = \varphi_1 - \varphi_2 = q/C.$$

Из формулы (22.23), полагая $\Omega = \Omega_p$, $\alpha = 0$ и выполняя интегрирование, получаем

$$\Delta\varphi_C = \frac{I_0}{\Omega_p C} \cos \Omega_p t.$$

Так как $\Omega_p = 1/\sqrt{LC}$, то амплитуды $\Delta\varphi_L$ и $\Delta\varphi_C$ одинаковы, т. е.

$$L\Omega_p I_0 = \frac{I_0}{\Omega_p C},$$

а фазы противоположны: $\Delta\varphi_L$ опережает $\Delta\varphi_C$ по фазе на π . Таким образом, $\Delta\varphi_L + \Delta\varphi_C = 0$, и напряжение U_R на активном сопротивлении равно э. д. с. \mathcal{E} источника энергии:

$$U_R = IR = I_0 R \sin \Omega_p t = \mathcal{E}.$$

В связи с этим рассмотренное нами явление резонанса в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора, называют **резонансом напряжений**

Явление резонанса напряжений можно наблюдать в опыте, схема которого изображена на рис. 22.7. Колебательный контур, состоящий

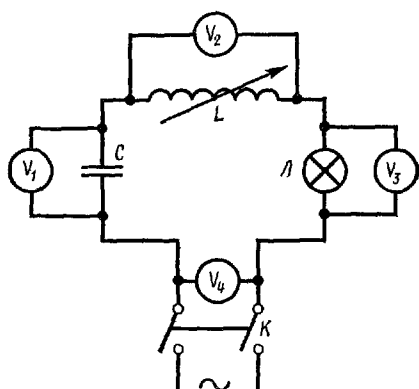


Рис. 22.7

из катушки L с подвижным железным сердечником, конденсатора C и лампы накаливания L , включается в цепь переменного тока с помощью рубильника K . Значения $\Delta\phi$ на всех участках контура и клеммах рубильника измеряются вольтметрами V_1 , V_2 , V_3 и V_4 . При произвольных значениях индуктивности катушки и емкости конденсатора показания всех вольтметров различны, а накал нити лампы слабее нормального. Изменяя индуктивность катушки путем перемещения сердечника, можно добиться наиболее яркого свечения лампы. При этом оказыва

ется, что показания вольтметров V_1 , V_2 и V_3 , V_4 попарно равны, т. е. наблюдается резонанс напряжений.

5. Если вынуждающая э. д. с. \mathcal{E} представляет собой сумму синусоидальных э. д. с. с различными циклическими частотами Ω_i , т. е.

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_0_i \sin \Omega_i t,$$

то результирующий электрический ток I в колебательном контуре также будет представлять сумму синусоидальных токов с циклическими частотами Ω_i и начальными фазами α_i :

$$I = \sum_{i=1}^n I_{0i} \sin (\Omega_i t + \alpha_i).$$

Однако благодаря явлению электрического резонанса контур сильнее всего реагирует на ту составляющую э. д. с., частота Ω которой равна или наиболее близка к резонансной частоте Ω_p контура. Поэтому ток в контуре в основном определяет-

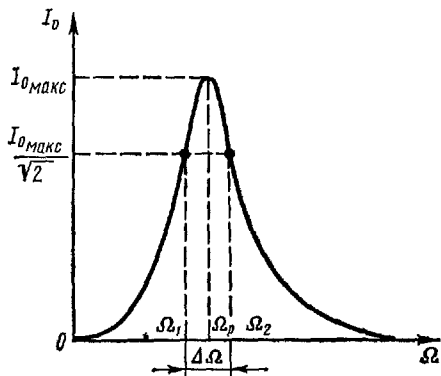


Рис. 22.8

ся этой составляющей э. д. с. На описанном явлении основаны все радиоприемные устройства, неотъемлемой частью которых является колебательный контур, резонансная частота которого может изменяться вследствие изменения его емкости или индуктивности.

Легко видеть, что влияние на колебательный контур вынуждающих э. д. с., частоты которых отличны от Ω_p , будет тем слабее, чем «острее» резонансная кривая для контура, т. е. чем резче зависимость I_0 от Ω вблизи значения $\Omega = \Omega_p = \omega_0$. «Остроту» резонансной кривой можно охарактеризовать ϵ помощью **относительной полуширины** этой кривой, равной $\Delta\Omega/\Omega_p$, где $\Delta\Omega$ — разность значений Ω_2 и Ω_1 циклической частоты, соответствующих $I_0^2 = (I_0^2)_{\text{макс}}/2$ (рис. 22.8).

Полагая в формуле (22.25) $I_0 = \frac{I_{0\text{ макс}}}{\sqrt{2}} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}R}$, получим

$$\frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}R} = \frac{\epsilon_0}{R \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L \right)^2}},$$

или

$$\frac{\Omega^2 L^2}{R^2} \left(\frac{1}{\Omega^2 LC} - 1 \right)^2 = 1.$$

Заменив $(R^2/L^2) = 4\beta^2$ и $(1/LC) = \Omega_p^2$, после преобразований получим следующее уравнение, которому удовлетворяют искомые значения Ω_1 и Ω_2 циклической частоты:

$$(\Omega_p^2 - \Omega^2)^2 = 4\beta^2 \Omega^2.$$

Это биквадратное уравнение эквивалентно следующим двум квадратным уравнениям:

$$\Omega_p^2 - \Omega^2 = 2\beta\Omega \quad \text{и} \quad \Omega_p^2 - \Omega^2 = -2\beta\Omega.$$

Решая эти квадратные уравнения и отбрасывая отрицательные корни, так как они не соответствуют физическому смыслу величины Ω , найдем:

$$\Omega_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \Omega_p^2}, \quad \Omega_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 + \Omega_p^2},$$

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\beta.$$

Относительная полуширина резонансной кривой колебательного контура равна

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{2\beta}{\Omega_p}. \quad (22.28)$$

Отношение резонансной циклической частоты к удвоенному коэффициенту затухания электромагнитных колебаний в контуре называется **добротностью колебательного контура**:

$$Q = \frac{\Omega_p}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (22.29)$$

Можно показать, что добротность колебательного контура равна умноженному на 2π отношению полной энергии резонансных электромагнитных колебаний в контуре ($\Omega = \Omega_p$) к энергии, теряемой при этом на ленц-джоулево тепло за время одного полного колебания.

Из (22.28) и (22.29) следует, что относительная полуширина резонансной кривой колебательного контура обратно пропорциональна его добротности:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{1}{Q}.$$

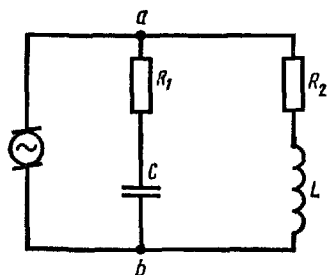


Рис. 22.9

6. Рассмотрим явление резонанса в электрической цепи, состоящей из параллельно включенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 22.9). Пусть разность потенциалов, приложенная к клеммам a и b , изменяется по гармоническому закону: $\varphi_a - \varphi_b = U_0 \sin \Omega t$.

Обозначим активные сопротивления первой и второй ветвей цепи через R_1 и R_2 , а силы тока в них — через I_1 и I_2 . Условимся считать I_1 и I_2 положительными, если токи направлены на рис. 22.9 сверху вниз. По закону Ома, токи I_1 и I_2 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$R_1 I_1 - \frac{q}{C} = U_0 \sin \Omega t, \quad (22.30)$$

$$R_2 I_2 = U_0 \sin \Omega t - L \frac{dI_2}{dt}, \quad (22.31)$$

где q — заряд конденсатора, связанный с силой тока I_1 соотношением (22.3):

$$I_1 = -dq/dt,$$

поэтому (22.30) можно переписать в виде

$$R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -U_0 \sin \Omega t. \quad (22.30')$$

Уравнение (22.30') совпадает с (22.22), если в последнем положить $\mathcal{E}_0 = U_0$, $L = 0$ и $R = R_1$. Следовательно,

$$I_1 = I_{01} \sin(\Omega t + \alpha_1), \quad (22.32)$$

где I_{01} и α_1 находятся по формулам (22.25) и (22.24) в предположении, что $\mathcal{E}_0 = U_0$, $L = 0$ и $R = R_1$:

$$I_{01} = \frac{U_0}{\sqrt{R_1^2 + 1/\Omega^2 C^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_1 = \frac{1}{\Omega C R_1}.$$

Уравнение (22.31) также совпадает с (22.22), если в (22.22) положить $\mathcal{E}_0 = U_0$, $R = R_2$, $C = \infty$ и ввести замену переменных $\frac{dq}{dt} = -I_2$. Поэтому ток I_2 равен

$$I_2 = I_{02} \sin(\Omega t + \alpha_2), \quad (22.33)$$

где

$$I_{02} = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + \Omega^2 L^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_2 = -\frac{\Omega L}{R_2}.$$

Ток I в неразветвленной части цепи представляет собой сумму синусоидальных токов I_1 и I_2 :

$$I = I_{01} \sin(\Omega t + \alpha_1) + I_{02} \sin(\Omega t + \alpha_2).$$

Из рассмотренного в первом томе (см. § 8.3) правила сложения гармонических колебаний следует, что ток I также должен быть синусоидальным с циклической частотой Ω :

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \alpha), \quad (22.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \text{tg } \alpha &= \frac{I_{01} \sin \alpha_1 + I_{02} \sin \alpha_2}{I_{01} \cos \alpha_1 + I_{02} \cos \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (22.35)$$

Задача упрощается, если активные сопротивления параллельных ветвей равны нулю ($R_1 = R_2 = 0$):

$$I_{01} = \frac{U_0}{1/\Omega C}, \quad I_{02} = \frac{U_0}{\Omega L},$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \infty \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_2 = -\infty,$$

т. е. $\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = 3\pi/2$, так что токи в ветвях противоположны по фазе.

Амплитуда I_0 тока во внешней (неразветвленной) цепи, как видно из (22.35), будет равна модулю разности амплитуд тока в параллельных ветвях:

$$I_0 = |I_{01} - I_{02}| = U_0 \left| \Omega C - \frac{1}{\Omega L} \right|. \quad (22.35')$$

Если $\Omega = \Omega_p = 1/\sqrt{LC}$, то $I_{01} = I_{02}$ и $I_0 = 0$.

Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно соединенные индуктивное и емкостное сопротивления, при приближении циклической частоты Ω вынуждающей э.д.с. к резонансной частоте $\Omega_p = 1/\sqrt{LC}$ называется **резонансом токов**.

Резонанс токов можно наблюдать в опыте, схема которого изображена на рис. 22.10, где L — катушка с постоянной индуктивностью, C — конденсатор переменной емкости, A_1 , A_2 и A_3 — амперметры. Если включить рубильник K и изменять емкость C конденсатора, то показания амперметров тоже меняются. При некотором значении этой емкости показания амперметров A_2 и A_3 становятся одинаковыми, а ток через амперметр A_1 практически отсутствует, т. е. имеет место резонанс токов.

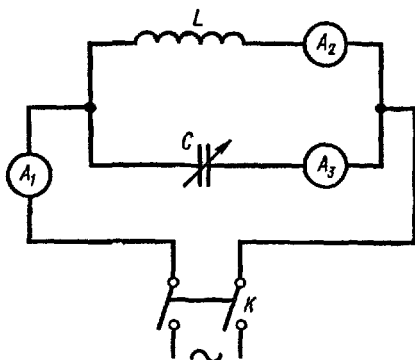


Рис. 22.10