

вольный по величине («непробный») точечный заряд q , помещенный в это поле, выражается формулой, аналогичной (2.1):

$$F = qE \quad (2.1')$$

Однако здесь в отличие от (2.1) E — напряженность в точке нахождения заряда q для поля, и с к а ж е н н о г о этим зарядом, т.е. в общем случае отличного от поля, которое было до внесения в него заряда q .

3 За единицу напряженности принимается напряженность в такой точке электрического поля, в которой на пробный заряд, равный единице заряда, действует сила, равная единице силы. Единица напряженности электрического поля в Международной системе единиц (СИ)

$$1 \text{ СИ}_E = 1 \text{ Н/Кл},$$

а в системе СГСЭ

$$1 \text{ СГСЭ}_E = 1 \text{ дин/СГСЭ}_q.$$

Так как $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$, $1 \text{ СГСЭ}_q = 1/(3 \cdot 10^9) \text{ Кл}$, то $1 \text{ СГСЭ}_E = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/Кл}$.

4 Найдем выражение для напряженности поля точечного электрического заряда q . Полагая в законе Кулона (1.8) $q_1 = q$, $q_2 = q_0$ и учитывая, что сила F_0 , действующая на пробный заряд q_0 , равна

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0q}{\epsilon r^3} r,$$

где r — радиус-вектор, соединяющий заряды q и q_0 , по формуле (2.1) получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^3} r, \quad (2.2)$$

Из формулы (2.2) следует, что векторы напряженности электростатического поля точечного заряда q во всех точках поля направлены радиально от заряда, если он положителен ($q > 0$), и к заряду, если он отрицателен ($q < 0$).

Проекция E_r вектора напряженности E этого поля на направление радиуса-вектора пропорциональна величине заряда q и обратно пропорциональна произведению относительной диэлектрической проницаемости ϵ среды на квадрат расстояния r от рассматриваемой точки поля до заряда:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \quad (2.2')$$

§ 2.2. Принцип суперпозиции электрических полей

1. Основная задача электростатики заключается в следующем: по заданному распределению в пространстве и величине источников поля — электрических зарядов — найти абсолютное значение и направление вектора напряженности E в каждой точке поля.

Пусть поле создано системой неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n . Экспериментально было показано, что результирующая сила F , действующая на пробный заряд q_0 в любой точке рассматриваемого поля, равна векторной сумме сил F_i , приложенных к нему со стороны каждого из зарядов q_i :

$$F = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (2.3)$$

Из (2.1) следует, что $F = q_0 E$ и $F_i = q_0 E_i$, где E — напряженность результирующего поля, а E_i — поля, создаваемого одним зарядом q_i . Подставляя эти выражения в (2.3) и сокращая на q_0 , получим

$$E = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (2.4)$$

Напряженность электрического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности. Иными словами, результирующее поле можно найти простым наложением (суперпозицией) полей отдельных зарядов.

Полученный результат часто называют принципом независимости действия электрических полей или **принципом суперпозиции полей**.

2. Обозначим через r_i радиус-вектор, проведенный из точечного заряда q_i в исследуемую точку поля. Тогда по формуле (2.2)

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} r_i,$$

а по формуле (2.4)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} r_i. \quad (2.5)$$

Всякое заряженное тело можно разбить на столь малые части, что каждая из них будет представлять собой точечный заряд. Поэтому формула (2.5) пригодна для расчета любых электростатических полей в однородной изотропной среде, заполняющей все поле.

3. Рассмотрим наиболее типичные случаи распределения этих зарядов в пространстве. Неподвижные электрические заряды располагаются в пространстве либо **дискретно** — в отдельных точках, либо **непрерывно** — вдоль какой-либо линии, на поверхности какого-либо тела или, наконец, в некотором объеме.

Если заряды непрерывно распределены вдоль некоторой линии, поверхности или объема, то вводят понятия соответственно линейной, поверхностной и объемной плотностей зарядов. **Линейная плотность электрических зарядов**

$$\tau = dq/dl, \quad (2.6)$$

где dq — заряд малого участка линии длиной dl . **Поверхностная плотность зарядов**

$$\sigma = dq/dS, \quad (2.7)$$

где dq — заряд малого участка поверхности площадью dS . **Объемная плотность зарядов**

$$\rho = dq/dV, \quad (2.8)$$

где dq — заряд малого элемента объема dV .

В случае непрерывного распределения зарядов вместо суммы в правой части формулы (2.5) берется интеграл.

4. В качестве первого примера полей, создаваемых системой зарядов, рассмотрим поле электрического диполя.

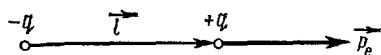


Рис. 2.1

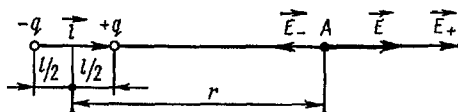


Рис. 2.2

Электрическим диполем называют систему двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов $+q$ и $-q$ ($q > 0$), расстояние l между которыми мало по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек поля. Оказывается, что молекулы диэлектриков по своим электрическим свойствам подобны диполям (см. гл. VI). Поэтому изучение поля диполя представляет большой практический интерес.

Введем некоторые определения. **Плечом диполя** называется вектор l , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними (рис. 2.1). Произведение положительного заряда диполя q на плечо l называется **электрическим моментом диполя** p_e :

$$p_e = ql. \quad (2.9)$$

Вектор p_e совпадает по направлению с плечом диполя l .

5. В соответствии с принципом суперпозиции полей напряженность в произвольной точке поля диполя $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$, где \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- — напряженности полей зарядов $+q$ и $-q$.

Если точка A расположена на оси диполя (рис. 2.2), то векторы \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- направлены также вдоль этой оси, но в противоположные стороны. По формуле (2.2),

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_1^3} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_2^3} \mathbf{r}_2,$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиусы-векторы, проведенные в точку A из концов диполя $+q$ и $-q$, причем $r_1 = r - l/2$ и $r_2 = r + l/2$; \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 совпадают по направлению с вектором l , поэтому

$$r_1 = \frac{1}{l} (r - l/2) \text{ и } r_2 = \frac{1}{l} (r + l/2).$$

Следовательно,

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon(r - l/2)^2} \frac{1}{l}; \quad E_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon(r + l/2)^2} \frac{1}{l},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\epsilon l} \left[\frac{1}{(r - l/2)^2} - \frac{1}{(r + l/2)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rq l}{\epsilon (r^2 - l^2/4)^2}.$$

Учитывая, что $ql = p_e$, получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e r}{\epsilon (r^2 - l^2/4)^2}.$$

Если $r \gg l$, то членом $l^2/4$ по сравнению с r^2 можно пренебречь. Тогда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{\epsilon r^3}; \quad (2.10)$$

численное значение напряженности

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{\epsilon r^3}. \quad (2.10')$$

6. Найдем напряженность поля диполя в точке B , расположенной на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины O (рис. 2.3). Точка B равноудалена от зарядов $+q$ и $-q$. Поэтому

$$|E_+| = |E_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon (r^2 + l^2/4)}.$$

Треугольники BMN и BCD — равнобедренные, причем углы при вершинах M и N $\triangle BMN$ и при вершинах B и C $\triangle BCD$ одинаковы и равны α . Так как стороны BM и BD , а также BN и DC попарно параллельны, то стороны MN и BC параллельны, т.е. вектор E противоположен по направлению электрическому моменту диполя p_e :

$$E = -E \frac{p_e}{p_e} = -\frac{E}{ql} p_e. \quad (2.11)$$

Из рис. 2.3 видно, что числовое значение напряженности поля в точке B равно

$$E = |E_+| \cos \alpha + |E_-| \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\epsilon (r^2 + l^2/4)} \cos \alpha.$$

Из $\triangle BMO$ имеем $\cos \alpha = l/2 \sqrt{r^2 + l^2/4}$. Поэтому

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\epsilon (r^2 + l^2/4)^{3/2}}.$$

Пренебрегая величиной $l^2/4$ по сравнению с r^2 , получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{\epsilon r^3}. \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что вектор напряженности поля в точке B равен

$$\mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{\epsilon r^3}. \quad (2.12')$$

7. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть точка C лежит на расстоянии r от середины O диполя, причем радиус-вектор \mathbf{r} образует с осью диполя угол φ (рис. 2.4). Соединим пунктиром заряды $-q$

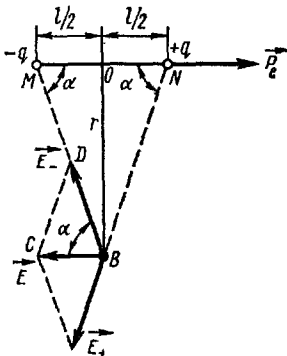


Рис. 2.3

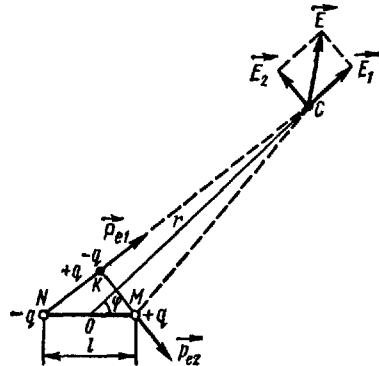


Рис. 2.4

и $+q$ с точкой C и опустим на прямую NC перпендикуляр из точки M . Поместим в основании K этого перпендикуляра два точечных заряда $+q$ и $-q$. Расположенные в одной и той же точке равные по величине и противоположные по знаку заряды $+q$ и $-q$ полностью нейтрализуют друг друга и не искажают поля диполя. Четыре заряда, находящиеся в точках M , N и K , можно рассматривать как два диполя (NK и MK). Ввиду малости расстояния l по сравнению с r угол $CNM \approx \varphi$. Поэтому электрические моменты первого и второго диполей соответственно равны:

$$p_{e1} = ql \cos \varphi = p_e \cos \varphi, \quad p_{e2} = ql \sin \varphi = p_e \sin \varphi. \quad (2.13)$$

Для первого диполя точка C лежит на его оси, а для второго — на перпендикуляре, восстановленном в средней точке оси. По формулам (2.10) и (2.12') напряженности \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 полей, создаваемых в точке C каждым из диполей, равны

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_{e1}}{\epsilon r^3}, \quad \mathbf{E}_2 = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{e2}}{\epsilon r^3}.$$

Векторы \mathbf{p}_{e1} и \mathbf{p}_{e2} и соответственно \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 взаимно перпендикулярны. Поэтому численное значение напряженности поля диполя MN в точке C

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon r^3} \sqrt{(2p_{e1})^2 + (p_{e2})^2}.$$

Подставив сюда значения p_{e1} и p_{e2} из (2.13), получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{er^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) охватывает все возможные случаи расположения точки C . При $\varphi = 0$ она совпадает с (2.10'), а при $\varphi = \pi/2$ — с (2.12).

8. Из формулы (2.14) следует, что напряженность электрического поля диполя зависит от направления радиуса-вектора r относительно оси диполя и убывает пропорционально кубу расстояния r

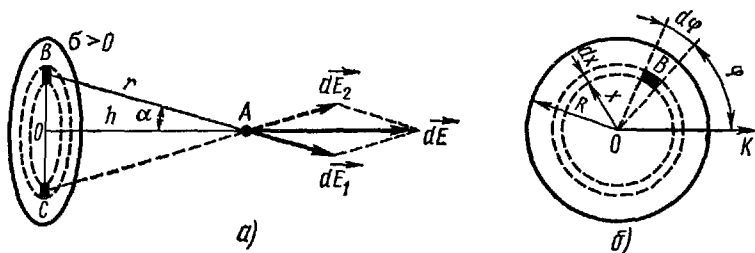


Рис. 2.5

от его центра, т.е. значительно быстрее, чем в случае поля одного точечного заряда. В связи с этим сила взаимодействия двух диполей оказывается обратно пропорциональной четвертой степени расстояния между ними. Еще быстрее убывает с расстоянием напряженность поля квадруполь — системы двух одинаковых и антипараллельных диполей, заряды которых расположены в вершинах небольшого квадрата. Для квадруполь $E \sim r^{-4}$, а сила взаимодействия двух квадруполей $F \sim r^{-6}$. Чем больше число пар разноименных зарядов и чем симметричнее они расположены в теле, тем быстрее убывает напряженность поля в зависимости от расстояния.

9. В качестве примера электростатического поля системы, образованной непрерывно распределенными зарядами, рассмотрим поле круглой пластинки радиуса R , заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ ($\sigma > 0$). Найдем напряженность поля в произвольной точке A прямой, перпендикулярной плоскости пластинки и проходящей через ее центр O (рис. 2.5, а).

Выделим на пластине бесконечно малый элемент поверхности B (рис. 2.5, б), ограниченный окружностями радиусов x и $x + dx$, центры которых лежат в точке O , и двумя радиусами, образующими с полярной осью OK углы φ и $\varphi + d\varphi$. Площадь dS элемента B и его заряд dq равны соответственно:

$$dS = x d\varphi dx, \quad dq = \sigma dS = \sigma x d\varphi dx.$$

Заряд элемента поверхности B можно считать точечным. Напряженность поля dE_1 , создаваемая им в точке A , направлена вдоль прямой BA и по формуле (2.2') численно равна

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\epsilon r^2} = \frac{\sigma x dx d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2},$$

где r — расстояние от точки A до элемента B пластины. Из рис. 2.5, a видно, что $r^2 = h^2 + x^2$; здесь $h = OA$ — расстояние от точки A до центра пластины.

Элемент пластины C , симметричный элементу B относительно точки O , создает в точке A поле напряженностью dE_2 . Так как элементы B и C имеют одинаковые заряды dq и равноудалены от точки A , то $dE_2 = dE_1$, причем векторы dE_1 и dE_2 симметричны относительно прямой OA . Поэтому вектор dE напряженности результирующего поля ($dE = dE_1 + dE_2$) направлен вдоль OA и численно равен

$$dE = 2dE_1 \cos \alpha,$$

где $\cos \alpha = h/r$. Таким образом,

$$dE = \frac{2\sigma h x dx d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^3} = \frac{\sigma h}{2\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{x dx d\varphi}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по всем элементам заряженной пластинки, т.е. по x от O до R и по φ от O до π , находим численное значение E напряженности поля пластинки в точке A :

$$E = \frac{\sigma h}{2\pi\epsilon_0 \epsilon} \int_0^R \frac{x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_0^R \frac{x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Введем замену переменных, обозначив $h^2 + x^2 = z^2$, тогда

$$E = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_h^{\sqrt{h^2+R^2}} \frac{z dz}{z^3} = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_h^{\sqrt{h^2+R^2}} d\left(\frac{1}{z}\right).$$

После интегрирования получаем

$$E = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/h^2}} \right]. \quad (2.15)$$

Так как все векторы dE перпендикулярны плоскости пластины, то и результирующий вектор E имеет то же направление.

10. Рассмотрим два предельных случая этого поля. Если $R \rightarrow \infty$, то пластина превращается в бесконечную равномерно заряженную плоскость, напряженность поля которой

$$E = \sigma/2\epsilon_0 \epsilon. \quad (2.16)$$

Из (2.16) следует, что напряженность поля равномерно заряженной плоскости не зависит от положения точки A ($E = \text{const}$). Во всех точках поля векторы E направлены перпендикулярно плоскости (от нее, если $\sigma > 0$, и к ней, если $\sigma < 0$). Поэтому

$$E = \text{const}. \quad (2.17)$$

Электростатическое поле, удовлетворяющее условию (2.17), называется **однородным**.

Пусть теперь $h \gg R$. Это значит, что линейные размеры заряженной пластины во много раз меньше расстояния до исследуемой точки поля. Из формулы бинома Ньютона, имеющей вид

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1!} \cdot a^{m-1} \cdot b + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot a^{m-2} \cdot b^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot a^{m-3} \cdot b^3 + \dots,$$

следует, что

$$\left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{h^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{h^2}\right)^2 - \dots$$

Так как третий и последующие члены этого ряда весьма малы по сравнению со вторым, то ими можно пренебречь, и тогда

$$\left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{h^2}.$$

Подставив это выражение в (2.15), получим

$$E = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 \varepsilon h^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h^2}, \quad (2.18)$$

где $q = \sigma R^2$ — общий заряд пластины.

Формула (2.18) совпадает с (2.2') для напряженности поля точечного заряда, если вместо h подставить r . Таким образом, вдали от заряженной пластины ее поле подобно полю точечного заряда, равного σR^2 .

§ 2.3. Графическое изображение электростатических полей

1. Графическое изображение электростатического поля с помощью векторов напряженности \mathbf{E} в различных точках поля очень неудобно. Векторы напряженности при этом накладываются друг на друга, и получается весьма запутанная картина. Более нагляден предложенный М. Фарадеем метод изображения электростатических полей с помощью силовых линий (линий напряженности). Силовыми линиями называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности поля (рис. 2.6). Силовым линиям приписывается направление такое же, как вектора напряженности. Например, на рис. 2.6 силовая линия направлена слева направо. Считается, что силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Линии напряженности не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор \mathbf{E} имеет лишь одно направление.

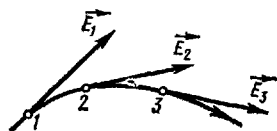


Рис. 2.6