4. Силовые линии не следует отождествлять с траекториями движения в электростатическом поле очень легких заряженных частиц. Траектория частицы обладает тем свойством, что в каждой ее точке по касательной к ней направлена с к о р о с т ь частицы. По касательной же к силовой линии направлены с и л а, действующая со стороны поля на частицу, а следовательно, и у с к о р е н и е частицы.

§ 2.4. Электрическое смещение. Теорема Остроградского—Гаусса

1. Напряженность электрического поля, как видно из рассмотренных в § 2.1 и 2.2 полей точечного заряда, диполя, равномерно заряженной круглой пластинки и плоскости, зависит от свойств среды: в однородной изотропной среде напряженность поля E всегда обратно пропорциональна ε. Поэтому для характеристики электрического поля наряду с напряженностью $\mathbf{E}$ удобно ввести еще одну векторную величину $\mathbf{D}$, называемую **электрическим смещением** или **электрической индукцией.** Для поля в электрически изотропной среде связь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в СИ имеет вид[1]

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E} \tag{2.19}$$

В СИ электрическое смещение выражается в кулонах на квадратный метр (Кл/м²).

В системе СГСЭ

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.2) следует, что для поля точечного заряда q

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^3}\mathbf{r}, \tag{2.21}$$

а проекция $\mathbf{D}$ на направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$

$$D_r = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}. \tag{2.21'}$$

2. Из приведенных в § 2.2 примеров видно, что решение основной задачи электростатики методом наложения полей сопряжено со значительными математическими трудностями. Другой метод расчета электростатических полей основан на использовании теоремы Остроградского—Гаусса. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству этой теоремы, введем понятие о потоке вектора электрического смещения сквозь поверхность.

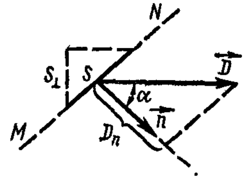

Рис. 2.11

3. Рассмотрим сначала однородное электрическое поле, во всех точках которого вектор $\mathbf{D}$ одинаков. Проведем в этом поле произвольную плоскость MN (рис. 2.11), нормаль $\mathbf{n}$ к которой

[1] Общее определение вектора $\mathbf{D}$, справедливое как для изотропных, так и для анизотропных сред, дано в § 6.3.

составляет с вектором **D** угол α. Выделим на плоскости участок площадью S. Тогда поток вектора электрического смещения, или просто **поток смещения** Φ_e **(поток электрической индукции)**, сквозь плоскую поверхность S по определению равен

$$\Phi_e = DS\cos\alpha = S\mathbf{Dn}, \tag{2.22}$$

где **n** — единичный вектор, нормальный к поверхности S.

Формулу (2.22) можно записать еще и в таком виде:

$$\Phi_e = D_n S = DS_\perp, \tag{2.22$'$}$$

где $D_n = D\cos\alpha$ — проекция вектора **D** на направление вектора **n**, а $S_\perp = S\cos\alpha$ — площадь проекции поверхности S на плоскость, перпендикулярную вектору **D**. Из (2.22′) следует, что в СИ поток смещения выражается в кулонах.

4. В общем случае поверхность S может иметь любую форму, а векторы **D** в различных ее точках могут отличаться как по модулю, так и по направлению. Однако в пределах каждого достаточно малого элемента dS поверхности ее можно считать плоской, а поле — однородным. Поэтому элементарный поток смещения сквозь участок поверхности, имеющий площадь dS,

$$d\Phi_e = DdS\cos(\widehat{\mathbf{D}, \mathbf{n}}) = D_n dS = DdS_\perp, \text{ или } d\Phi_e = \mathbf{D}d\mathbf{S}, \tag{2.23}$$

где **n** — единичный вектор, нормальный к площадке dS, а $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ — вектор площадки dS. Полный поток смещения Φ_e сквозь поверхность S найдем в результате суммирования (интегрирования) всех элементарных потоков:

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \int_S D_n dS = \int_S DdS_\perp. \tag{2.23$'$}$$

При вычислении этого интеграла все векторы **n** нормалей к площадкам dS нужно направлять в одну и ту же сторону по отношению к поверхности S. Так, например, в случае замкнутой поверхности S все векторы **n** должны быть либо внутренними нормалями, либо внешними (в дальнейшем будем пользоваться только последними).

Формулы (2.23) и (2.23′) являются наиболее общим определением понятия потока смещения.

5. Пусть электрическое поле создается одним точечным зарядом q. Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S, охватывающую этот заряд (рис. 2.12). Из (2.23) и (2.21′) следует, что поток смещения сквозь элемент dS этой поверхности равен

$$d\Phi_e = DdS_\perp = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}dS_\perp, \tag{2.24}$$

где r — расстояние от элемента dS до заряда q. Вектор электрического смещения **D** направлен радиально [см. формулу (2.21)]. Поэтому $dS_\perp$ — площадь проекции элемента поверхности dS на плоскость, перпендикулярную радиусу-вектору **r**. С точностью до бесконечно малых высшего порядка малости можно считать, что $dS_\perp$ равно площади dS' проекции элемента dS на сферу радиуса r, в центре которой находится заряд q ($dS_\perp$ и dS' на рис. 2.12 не показаны). Поэтому

$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi}\,\frac{dS'}{r^2}. \qquad (2.24')$$

Напомним, что **телесным углом** называется часть пространства, ограниченная конической поверхностью (рис. 2.13). Мерой телесного

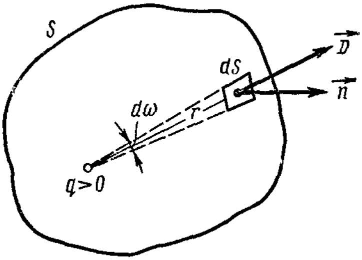

Рис. 2.12

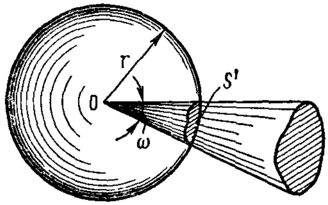

Рис. 2.13

угла ω является отношение площади S', вырезаемой конической поверхностью на сфере произвольного радиуса r с центром в вершине конуса O, к квадрату радиуса r:

$$\omega = S'/r^2. \qquad (2.25)$$

Если $S' = r^2$, то $\omega = 1$ ср. Так как полная площадь поверхности сферы равна $4\pi r^2$, то развернутый телесный угол, опирающийся на всю сферу и охватывающий собой все пространство, равен 4π ср. Таким образом, выражение dS'/r^2, входящее в (2.24′), представляет собой телесный угол $d\omega$, под которым элемент dS замкнутой поверхности S виден из точечного заряда q:

$$d\Phi_e = q\,d\omega/4\pi. \qquad (2.26)$$

Интегрируя это выражение по всей поверхности S, т. е. по ω от 0 до 4π, находим выражение для потока смещения электрического поля точечного заряда q сквозь произвольную замкнутую поверхность S, охватывающую этот заряд:

$$\Phi_e = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi}\,d\omega = q. \qquad (2.27)$$

6. Если замкнутая поверхность S не охватывает заряда q (рис. 2.14), то касатель-

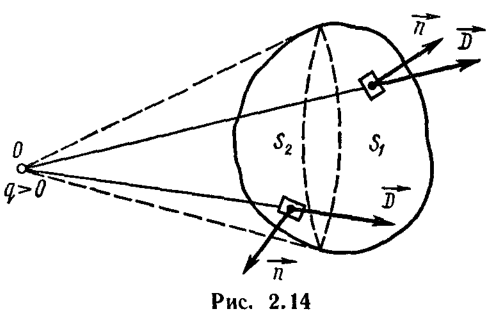

Рис. 2.14

ная к ней коническая поверхность с вершиной в точке O, где находится заряд q, разбивает поверхность S на две части: S_1 и S_2. Поток смещения сквозь поверхность S равен алгебраической сумме потоков Φ_{e1} и Φ_{e2} соответственно сквозь поверхности S_1 и S_2:

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2}.$$

Поверхности S_1 и S_2 видны из точки O под одним и тем же телесным углом ω. Поэтому Φ_{e1} и Φ_{e2} равны друг другу по абсолютному значению:

$$|\Phi_{e1}| = |\Phi_{e2}| = \omega\,|q|\,/4\pi.$$

Однако если для всех элементов поверхности S_1 углы между векторами $\mathbf{D}$ и внешними нормалями $\mathbf{n}$ острые (при $q>0$), то для всех элементов поверхности S_2 эти углы тупые [1]. Следовательно,

$$\Phi_{e1} = \int_{S_1} D\cos\left(\widehat{\mathbf{D}, \mathbf{n}}\right) dS > 0, \quad \Phi_{e2} = \int_{S_2} D\cos\left(\widehat{\mathbf{D}, \mathbf{n}}\right) dS < 0,$$

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} = 0.$$

Таким образом, создаваемый точечным зарядом q поток смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность, не охватывающую этот заряд, равен нулю.

7. Формулу (2.27) легко обобщить для поля, создаваемого произвольной системой точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_m$. В самом деле, по принципу суперпозиции электрическое смещение $\mathbf{D}$ результирующего поля равно векторной сумме электрических смещений полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \cdots + \mathbf{D}_m = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{D}_i.$$

Поэтому проекция вектора $\mathbf{D}$ на направление нормали к площадке dS равна алгебраической сумме проекций всех векторов $\mathbf{D}_i$ на это направление:

$$D_n = \sum_{i=1}^{m} D_{in}.$$

Поток смещения результирующего поля сквозь произвольную замкнутую поверхность S, охватывающую заряды $q_1, q_2, \ldots, q_k$ и не охватывающую заряды $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_m$, равен

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = \oint_S \sum_{i=1}^{m} D_{in} dS = \sum_{i=1}^{m} \oint_S D_{in} dS = \sum_{i=1}^{m} \Phi_{ei}.$$

По формуле (2.27), $\Phi_{ei} = q_i$, если $i \leqslant k$, и $\Phi_e = 0$, если $i > k$.

[1] Для простоты предполагается, что поверхность S выпуклая.

Поэтому

$$\Phi_e = \oint\limits_S D_n dS = \sum_{i=1}^{k} q_i. \qquad (2.28)$$

Поток смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Полученный результат называется **теоремой Остроградского—Гаусса.** Всякое заряженное тело можно рассматривать как систему точечных зарядов. Поэтому теорема Остроградского — Гаусса справедлива для электрических полей, создаваемых любыми заряженными телами.

8. Для электрического поля в вакууме напряженность $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon_0$. Поэтому из (2.28) следует, что *поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью, к электрической постоянной*:

$$\oint\limits_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{k} q_i. \qquad (2.28')$$

Это еще одно выражение теоремы Остроградского—Гаусса применительно к электростатическому полю в вакууме.

Вопросы для повторения

1. Какие поля называются электростатическими?
2. Что такое напряженность электрического поля?
3. В чем состоит принцип суперпозиции электрнческих полей?
4. Чему равна напряженность поля точечного заряда, диполя, равномерно заряженной плоскости?
5. В чем состоит различие между снловыми линиями и траекториями зарядов в электрическом поле?
6. Сформулнруйте н докажнте теорему Остроградского—Гаусса.

Примеры решения задач

Задача 2.1. Весьма тонкое положительно заряженное кольцо радиуса 0,1 м лежит в плоскости XZ. Найти напряженность электрического поля и электрическое смещение в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии 0,15 м от его центра, если заряд кольца 5 нКл равномерно распределен по его окружности.

Дано:

$R = 0{,}1$ м
$h = 0{,}15$ м
$q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл
$\varepsilon = 1$

E — ? D — ?

Решение. Разделим кольцо L на одинаковые малые участкн dl. Заряд каждого участка, равный dq, можно считать точечным.

Совместим начало коордннат O с центром кольца (рис. 3.15). Тогда ось кольца совпадет с осью OY. Напряженность электрического поля $d\mathbf{E}$, создаваемого в точке A на оси кольца зарядом dq, по формуле (2.2′) численно равна

$$dE = dq/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2,$$

где $r^2 = R^2 + h^2$. Вектор $d\mathbf{E}$ составляет с осью OY угол α.

Заряженное кольцо создает в точке A поле, напряженность $\mathbf{E}$ которого согласно принципу суперпозиции равна векторной сумме напряженностей $d\mathbf{E}$