Поэтому

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{k} q_i. \qquad (2.28)$$

Поток смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Полученный результат называется **теоремой Остроградского—Гаусса.** Всякое заряженное тело можно рассматривать как систему точечных зарядов. Поэтому теорема Остроградского — Гаусса справедлива для электрических полей, создаваемых любыми заряженными телами.

8. Для электрического поля в вакууме напряженность $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon_0$. Поэтому из (2.28) следует, что *поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью, к электрической постоянной*:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{k} q_i. \qquad (2.28')$$

Это еще одно выражение теоремы Остроградского—Гаусса применительно к электростатическому полю в вакууме.

Вопросы для повторения

1. Какие поля называются электростатическими?
2. Что такое напряженность электрического поля?
3. В чем состоит принцип суперпозиции электрнческих полей?
4. Чему равна напряженность поля точечного заряда, диполя, равномерно заряженной плоскости?
5. В чем состоит различие между снловыми лиииями и траекториями зарядов в электрическом поле?
6. Сформулнруйте н докажнте теорему Остроградского—Гаусса.

Примеры решения задач

Задача 2.1. Весьма тонкое положительно заряженное кольцо радиуса 0,1 м лежит в плоскости XZ. Найти напряженность электрического поля и электрическое смещение в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии 0,15 м от его центра, если заряд кольца 5 нКл равномерно распределен по его окружности.

Дано:

$R = 0{,}1$ м
$h = 0{,}15$ м
$q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл
$\varepsilon = 1$

E — ? D — ?

Решение. Разделим кольцо L на одинаковые малые участкн dl. Заряд каждого участка, равный dq, можно считать точечным.

Совместим начало коордннат O с центром кольца (рис. 3.15). Тогда ось кольца совпадет с осью OY. Напряженность электрического поля $d\mathbf{E}$, создаваемого в точке A на оси кольца зарядом dq, по формуле (2.2′) численно равна

$$dE = dq/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2,$$

где $r^2 = R^2 + h^2$. Вектор $d\mathbf{E}$ составляет с осью OY угол α.

Заряженное кольцо создает в точке A поле, напряженность $\mathbf{E}$ которого согласно принципу суперпозиции равна векторной сумме напряженностей $d\mathbf{E}$

полей, создаваемых всеми точечными зарядами dq, на которые разбивается заряд кольца, т. е.

$$\mathbf{E} = \oint_L d\mathbf{E},$$

где знак $\oint_L$ означает, что интегрирование (суммирование) векторов $d\mathbf{E}$ производится по всем элементам заряженного кольца L. Вектор $d\mathbf{E}$ можно разложить на две составляющие: $d\mathbf{E}_1$, направленную вдоль оси OY, и $d\mathbf{E}_2$, параллельную плоскости XZ: $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$. Следовательно,

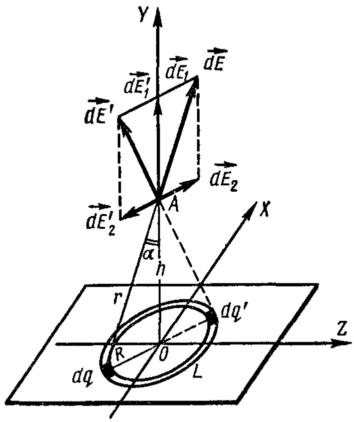

Рис. 2.15

$$\mathbf{E} = \oint_L d\mathbf{E}_1 + \oint_L d\mathbf{E}_2.$$

Для каждой пары зарядов dq и $dq' = dq$, расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы $d\mathbf{E}_2$ и $d\mathbf{E}_2'$ в точке A равны по модулю и противоположны по направлению ($d\mathbf{E}_2 = -d\mathbf{E}_2'$). Поэтому векторная сумма $\oint_L d\mathbf{E}_2 = 0$. Составляющие $d\mathbf{E}_1$ для всех элементов кольца имеют одинаковые направления. Таким образом, $E = \oint_L dE_1 = \oint_L dE \cos\alpha$.

Подставив в эту формулу выражение для dE, получим

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_0^q \frac{dq}{r^2} \cos\alpha.$$

Так как $r^2 = R^2 + h^2$ и $\cos\alpha = (h/r) = h/\sqrt{R^2 + h^2}$, то

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^q dq = \frac{h}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\,(R^2 + h^2)^{3/2}}\, q.$$

Электрическое смещение в точке A найдем по формуле (2.19):

$$D = \varepsilon_0\varepsilon E = \frac{h}{4\pi\,(R^2 + h^2)^{3/2}}\, q.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$E = \frac{h}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\,(R^2 + h^2)^{3/2}}\, q = \frac{0,15 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\,(0,1^2 + 0,15^2)^{3/2}}\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} =$$

$$= 1150\ \text{Н/Кл},$$

$$D = \frac{h}{4\pi\,(R^2 + h^2)^{3/2}}\, q = \frac{0,15}{4 \cdot 3,14 \cdot (0,1^2 + 0,15^2)^{3/2}} \cdot 5 \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} =$$

$$= 1,02 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл/м}^2 = 10,2\ \text{нКл/м}^2.$$