между этими точками единичного заряда силы поля совершают работу, равную единице.

В СИ за единицу разности потенциалов принимают **вольт** (В). Разность потенциалов между двумя точками поля равна одному вольту, если для перемещения между ними заряда в один кулон нужно совершить работу в один джоуль:

$$1\text{В} = 1 \text{ Дж/Кл}.$$

В системе единиц СГСЭ за единицу разности потенциалов принимается разность потенциалов между такими двумя точками поля, для перемещения между которыми единицы СГСЭ заряда нужно совершить работу в 1 эрг:

$$1\text{СГСЭ}_\varphi = 1 \text{ эрг/СГСЭ}_q.$$

Так как 1 Дж $= 10^7$ эрг и 1 Кл $= 3\cdot 10^9$ СГСЭ$_q$, то

$$1 \text{ В} = (1/300)\,\text{СГСЭ}_\varphi.$$

В атомной физике и электронике очень часто употребляют единицу работы и энергии, называемую **электронвольтом** (эВ). Один электронвольт равен работе, совершаемой при перемещении заряда, равного заряду электрона, между двумя точками поля с разностью потенциалов один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6\cdot 10^{-19} \text{ Кл}\cdot 1 \text{ В} = 1{,}6\cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1{,}6\cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

9. Из сопоставления (3.13) и (3.13′) видно, что при наложении электростатических полей потенциал в какой-либо точке результирующего поля равен *алгебраической* сумме потенциалов в этой точке каждого из слагаемых полей. В этом заключается существенное преимущество скалярной характеристики поля (потенциала) перед его векторной характеристикой — напряженностью, которая равна *геометрической* сумме напряженностей слагаемых полей. Напряженность поля является его *силовой* характеристикой, а потенциал — *энергетической*. Между ними существует тесная взаимосвязь, которая рассматривается в следующем параграфе.

§ 3.3. Связь между потенциалом и напряженностью. Эквипотенциальные поверхности

1. Из формул (3.1) и (3.5) следует, что элементарная работа, совершаемая при бесконечно малом перемещении заряда q_0 в электростатическом поле,

$$dA = q_0 E \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}})\, dl = -dW.$$

Так как заряд $q_0 = \text{const}$, то из (3.13) имеем

$$dW = q_0 d\varphi,$$

откуда

$$E \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}})\, dl = -d\varphi, \text{ или } \mathbf{E}d\mathbf{l} = -d\varphi. \tag{3.16}$$

Но $dl \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}})$ есть элемент dl_0 длины силовой линии (см. рис. 3.1). Поэтому

$$E = -d\varphi/dl_0, \tag{3.17}$$

где $d\varphi/dl_0$ — быстрота изменения потенциала вдоль силовой линии, численно равная изменению потенциала, приходящемуся на единицу ее длины.

На основании соотношения (3.17) за единицу напряженности электрического поля в СИ принимают вольт на метр: 1 В/м = 1 Н/Кл.

2. Покажем, что изменение потенциала, приходящееся на единицу длины, максимально в направлении силовой линии. В самом деле, как видно из рис. 3.3,

$$E \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = E_l,$$

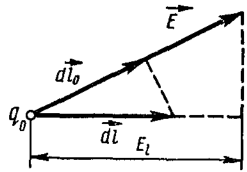


Рис. 3.3

где E_l — проекция вектора $\mathbf{E}$ напряженности электростатического поля на направление перемещения $d\mathbf{l}$. Поэтому формулу (3.16) можно переписать в таком виде:

$$E_l = -d\varphi/dl. \tag{3.18}$$

Так как $\cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) \leqslant 1$, то $E_l \leqslant E$ и $|d\varphi/dl| \leqslant |d\varphi/dl_0|$. Следовательно, E_l и $|d\varphi/dl|$ достигают максимальных значений при $\cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = 1$, т.е. если $d\mathbf{l}$ направлен по касательной к силовой линии.

Таким образом, вблизи данной точки электростатического поля потенциал изменяется наиболее быстро в направлении силовой линии. Знак минус в уравнениях (3.17) и (3.18) указывает на то, что вектор $\mathbf{E}$ напряженности поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала. Из (3.17) следует, что напряженность поля численно равна быстроте изменения потенциала на единицу длины вдоль силовой линии.

В векторном анализе **градиентом скалярной величины** a, являющейся функцией координат, называется вектор $\text{grad}\, a$, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания этой величины и численно равный быстроте ее изменения на единицу длины в этом направлении. Из сказанного ясно, что напряженность и потенциал электростатического поля связаны следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\, \varphi. \tag{3.19}$$

Напряженность в какой-либо точке электростатического поля равна градиенту потенциала в этой точке, взятому с обратным знаком.

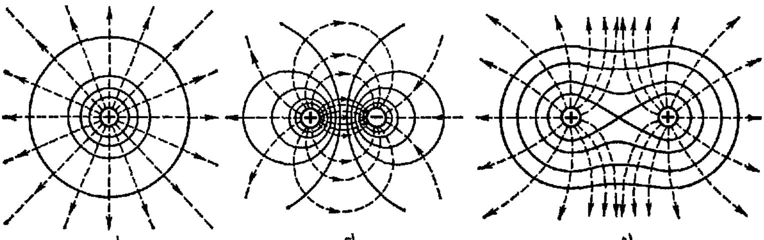
В общем случае потенциал φ — функция всех трех декартовых координат рассматриваемой точки поля, причем

$$\text{grad}\, \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Поэтому проекции вектора напряженности электростатического поля на оси координат связаны с потенциалом поля соотношениями:

$$E_x = -\partial\varphi/\partial x;\quad E_y = -\partial\varphi/\partial y;\quad E_z = -\partial\varphi/\partial z. \qquad (3.19')$$

3. Если заряд перемещается в направлении $d\mathbf{l}$, перпендикулярном силовой линии, т. е. перпендикулярно вектору **E**, то $\cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = 0$, $E_l = 0$ и, согласно (3.18), $d\varphi/dl = 0$ или $\varphi = \text{const}$. Следовательно,



а) *б)* *в)*

Рис. 3.4

во всех точках кривой, ортогональной к силовым линиям, потенциал одинаков.

Геометрическое место точек с одинаковым потенциалом называется **эквипотенциальной поверхностью.** Так как потенциал постоянен лишь вдоль кривых, ортогональных к силовым линиям поля, то и эквипотенциальные поверхности должны быть везде ортогональны к силовым линиям.

Очевидно, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда по одной и той же эквипотенциальной поверхности, равна нулю.

4. Электростатическое поле можно изобразить графически при помощи не только силовых линий, но и эквипотенциальных поверхностей. Вокруг каждой системы зарядов можно провести бесконечное множество эквипотенциальных поверхностей. Обычно их проводят таким образом, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы.

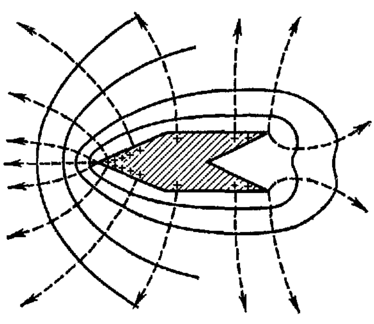


Рис. 3.5

Зная расположение силовых линий электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известному расположению эквипотенциальных поверхностей можно в каждой точке поля определить абсолютное значение и направление напряженности поля.

На рис. 3.4 изображены плоские сечения простейших электростатических полей: положительного точечного заряда (*а*), диполя (*б*) и двух одноименных точечных зарядов (*в*). Силовые линии проведены пунктиром, а сечения эквипотенциальных поверхностей — сплошными линиями. На рис. 3.5 показан вид силовых линий и эквипотенциальных поверхностей поля заряженного металлического цилиндра, имеющего конический выступ на одном конце и коническую впадину на другом.

§ 3.4. Вычисление напряженности и потенциала некоторых простейших электростатических полей

1. В § 2.2 были приведены примеры вычисления напряженности поля системы электрических зарядов способом суперпозиции полей. Теперь будет рассмотрен другой метод решения этой задачи, основанный на применении теоремы Остроградского—Гаусса. Установленная в § 3.3 связь между напряженностью поля и потенциалом [см. формулу (3.17)] позволяет по известной напряженности поля определить разность потенциалов между любыми двумя точками этого поля.

2. Электростатическое поле плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma>0$ (рис. 3.6). Из условия симметрии следует, что силовые линии параллельны друг другу и перпендикулярны заряженной плоскости P. Для определения напряженности поля в какой-либо точке A проведем через эту точку и симметричную ей точку B две плоскости, параллельные P. Построим бесконечно узкий прямой цилиндр, основания dS которого проходят через точки A и B, а образующая параллельна силовым линиям поля (рис. 3.6). Согласно теореме Остроградского—Гаусса [см. уравнение (2.28)], поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен заряду σdS, охватываемому этой поверхностью. С другой стороны, поток смещения сквозь эту поверхность равен сумме потоков сквозь основания цилиндра, так как поток сквозь боковую поверхность равен нулю ($D_n = 0$). Векторы электрического смещения $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ в точках A и B численно равны друг другу и противоположны по направлению:

$$\mathbf{D}_1 = -\mathbf{D}_2, \quad D_1 = D_2 = D.$$

Векторы $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ совпадают с внешними нормалями к основаниям цилиндра. Поэтому поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен $2DdS = \sigma dS$, откуда электрическое смещение

$$D = \sigma/2 \qquad (3.20)$$

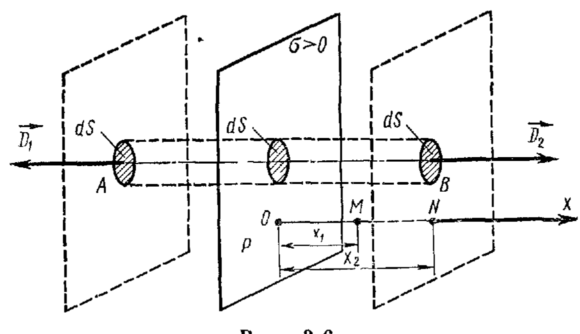


Рис. 3.6