двух одноименных точечных зарядов (*в*). Силовые линии проведены пунктиром, а сечения эквипотенциальных поверхностей — сплошными линиями. На рис. 3.5 показан вид силовых линий и эквипотенциальных поверхностей поля заряженного металлического цилиндра, имеющего конический выступ на одном конце и коническую впадину на другом.

§ 3.4. Вычисление напряженности и потенциала некоторых простейших электростатических полей

1. В § 2.2 были приведены примеры вычисления напряженности поля системы электрических зарядов способом суперпозиции полей. Теперь будет рассмотрен другой метод решения этой задачи, основанный на применении теоремы Остроградского—Гаусса. Установленная в § 3.3 связь между напряженностью поля и потенциалом [см. формулу (3.17)] позволяет по известной напряженности поля определить разность потенциалов между любыми двумя точками этого поля.

2. Электростатическое поле плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma>0$ (рис. 3.6). Из условия симметрии следует, что силовые линии параллельны друг другу и перпендикулярны заряженной плоскости P. Для определения напряженности поля в какой-либо точке A проведем через эту точку и симметричную ей точку B две плоскости, параллельные P. Построим бесконечно узкий прямой цилиндр, основания dS которого проходят через точки A и B, а образующая параллельна силовым линиям поля (рис. 3.6). Согласно теореме Остроградского—Гаусса [см. уравнение (2.28)], поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен заряду σdS, охватываемому этой поверхностью. С другой стороны, поток смещения сквозь эту поверхность равен сумме потоков сквозь основания цилиндра, так как поток сквозь боковую поверхность равен нулю ($D_n = 0$). Векторы электрического смещения $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ в точках A и B численно равны друг другу и противоположны по направлению:

$$\mathbf{D}_1 = -\mathbf{D}_2, \quad D_1 = D_2 = D.$$

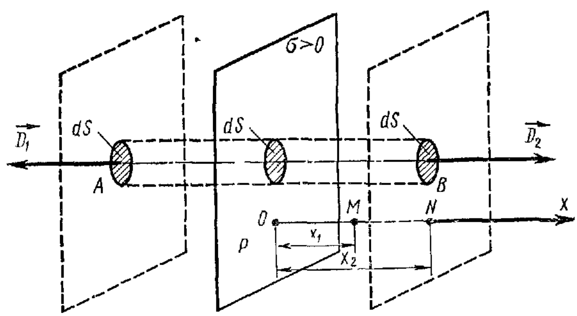

Рис. 3.6

Векторы $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ совпадают с внешними нормалями к основаниям цилиндра. Поэтому поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен $2DdS = \sigma dS$, откуда электрическое смещение

$$D = \sigma/2 \qquad (3.20)$$

Так как по формуле (2.19) $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, то напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \sigma / 2\varepsilon_0 \varepsilon. \qquad (3.20')$$

Эта формула была получена ранее иным, более сложным путем (см. § 2.2).

Найдем разность потенциалов между двумя точками M и N этого поля, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости (рис. 3.6). Заменив в формуле (3.17) dl_0 элементом длины dx, имеем $d\varphi = -Edx$. Но $E = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon$, поэтому

$$d\varphi = -\sigma dx / 2\varepsilon_0 \varepsilon.$$

Проинтегрировав последнее выражение по x от $x = x_1$ до $x = x_2$ и обозначив потенциалы в точках M и N через φ_1 и φ_2, получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma (x_1 - x_2) / 2\varepsilon_0 \varepsilon. \qquad (3.21)$$

3. Электростатическое поле между двумя параллельными плоскостями, заряженными разноименно с численно равными поверхностными плотностями $\sigma > 0$ и $-\sigma$. На рис. 3.7 изображены симметричные участки разноименно заряженных плоскостей. Силовые линии поля положительно заряженной плоскости показаны сплошными прямыми, отрицательно заряженной — пунктиром. Из условия симметрии следует, что силовые линии параллельны друг другу и перпендикулярны плоскостям.

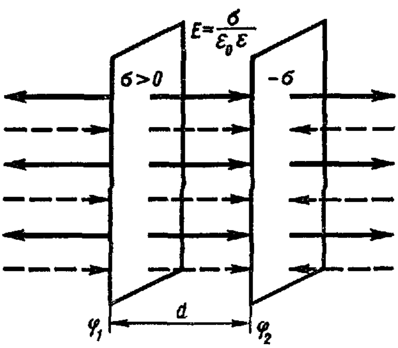

Рис 3.7

Как видно из рис 3.7, слева от положительно заряженной плоскости электрические поля взаимно уничтожаются, так как их векторы напряженности $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ численно равны и направлены в противоположные стороны. Между плоскостями оба вектора $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ имеют одинаковые направления, и поэтому здесь результирующая напряженность $\mathbf{E}$ численно равна сумме E_1 и E_2:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \qquad (3.22)$$

Вектор электрического смещения $\mathbf{D}$ численно равен

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E = \sigma. \qquad (3.23)$$

Проинтегрировав уравнение $d\varphi = -Edx$ по x от $x = 0$ до $x = d$, где d— расстояние между плоскостями, найдем разность потенциалов плоскостей:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon} \qquad (3.24)$$

Если разноименно заряженные плоские пластины имеют конечную величину (плоский конденсатор), то у краев пластин поле неоднородно (рис. 3.8) и формулы (3.22) — (3.24) справедливы лишь для точек поля, достаточно удаленных от краев пластин.

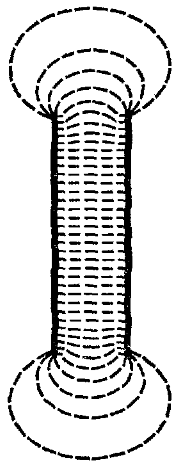

Рис. 3.8

4. Электростатическое поле бесконечно длинного прямого кругового цилиндра радиуса R, равномерно заряженного с линейной плотностью $\tau > 0$. Из условия симметрии следует, что силовые линии лежат в плоскостях, перпендикулярных образующей цилиндра, и направлены радиально от оси цилиндра (рис. 3.9), причем во всех точках, равноудаленных от оси цилиндра, численные значения как электрического смещения **D**, так и напряженности поля **E** одинаковы. Чтобы найти D и E в какой-либо точке A, лежащей на расстоянии $r > R$ от оси цилиндра, проведем через эту точку замкнутую цилиндрическую поверхность S, имеющую конечную длину l и коаксиальную с заряженной. Поток смещения сквозь основания этой поверхности, перпендикулярные оси цилиндра, очевидно, равен нулю, так как для оснований $D_n = 0$. В точках боковой поверхности $D_n = D = \text{const}$ и поток смещения равен $2\pi r l D$. Таким образом, полный поток смещения сквозь рассматриваемую замкнутую поверхность S

$$\Phi_e = 2\pi r l D. \qquad (3.25)$$

По теореме Остроградского—Гаусса, $\Phi_e = q$, где $q = l\tau$ — заряд, охватываемый поверхностью S. Таким образом,

$$\Phi_e = \tau l. \qquad (3.25')$$

Приравнивая правые части выражений (3.25) и (3.25′), получаем

$$D = \tau/2\pi r. \qquad (3.26)$$

Напряженность поля

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \qquad (3.26')$$

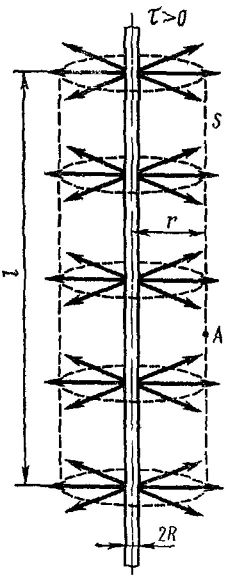

Рис. 3.9

Для точек, лежащих внутри цилиндра (на расстояниях от его оси $r < R$), можно провести аналогичные расчеты на основе теоремы Остроградского—Гаусса. Для этого нужно также построить замкнутую цилиндрическую поверхность S, коаксиальную заряженной, но радиуса $r < R$. Поток смещения Φ_e сквозь эту поверхность также выражается формулой (3.25). Однако теперь рассматриваемая поверхность S не охватывает зарядов, и по теореме Остроградского—Гаусса $\Phi_e = 2\pi r l D = 0$, так что $D = E = 0$ и $(d\varphi/dl) = 0$ независимо от направления вектора $d\mathbf{l}$. Таким образом, внутри заряженного цилиндра поля нет, а весь его объем эквипотенциален

Разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях $r_1 > R$ и $r_2 > R$ от оси заряженного цилиндра,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (3.27)$$

5. Электростатическое поле сферической поверхности радиуса R, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma > 0$. Из условия симметрии следует, что силовые линии поля заряженной сферы направлены радиально (рис. 3.10). По тем же причинам числовые значения электрического смещения $\mathbf{D}$ должны быть одинаковыми во всех точках, лежащих на одном и том же расстоянии от центра O заряженной сферы. Проведем через исследуемую точку поля A, лежащую вне заряженной сферы ($r > R$), шаровую поверхность S с центром в точке O. Во всех точках этой поверхности $D_n = D_r =$ const. Поэтому поток смещения сквозь замкнутую поверхность S

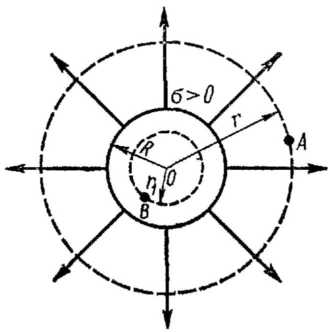

Рис. 3.10

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = D_r \oint_S dS = D_r S = D_r 4\pi r^2.$$

По теореме Остроградского—Гаусса этот поток также равен общему заряду сферы $q = 4\pi R^2 \sigma$. Следовательно,

$$D_r = q/4\pi r^2, \qquad (3.28)$$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \qquad (3.29)$$

Эти формулы тождественны формулам (2 21′) и (2.2′) для поля точечного заряда q. Таким образом, электростатическое поле вне равномерно заряженной сферической поверхности эквивалентно полю точечного заряда, равного общему заряду сферы и расположенного в ее центре.

Рассмотрим теперь произвольную точку B, лежащую внутри сферы ($r_1 < R$). Проведенная через нее сфера с центром в точке O

не охватывает электрических зарядов. Поэтому $\Phi_e = 4\pi r_1^2 D_r = 0$ и $D = E = 0$.

На рис. 3.11 представлен график зависимости напряженности электростатического поля равномерно заряженной сферической поверхности от расстояния r точки поля до центра этой поверхности.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра заряженной сферической поверхности ($r_1 > R$

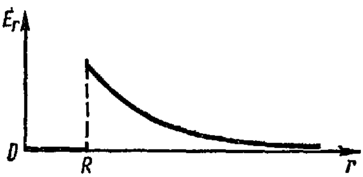

Рис. 3.11

и $r_2 > R$), находим из формулы

$$d\varphi = -E_r dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\, dr;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (3.30)$$

Положив $r_1 = R$ и $r_2 = \infty$, получим потенциал заряженной сферической поверхности

$$\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon R). \qquad (3.30')$$

Внутри заряженной сферы поля нет, и потому весь ее объем эквипотенциален.

6. Электростатическое поле шара радиуса R, равномерно заряженного с объемной плотностью $\rho > 0$ (рис. 3.12).

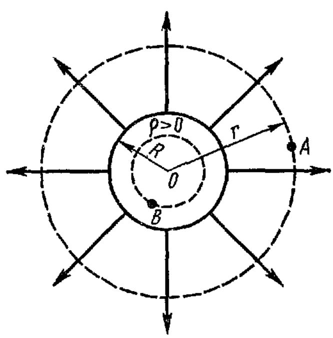

Рис. 3.12

В любой точке A, лежащей вне шара на расстоянии r от его центра ($r > R$), его поле аналогично полю точечного заряда $q = 4\pi R^3\rho/3$, расположенного в центре шара. Поэтому электрическое смещение напряженность поля и разность потенциалов вычисляются соответственно по формулам (3.28), (3.29) и (3.30).

В точке B, лежащей в н у т р и шара на расстоянии r от его центра ($r < R$), электрическое смещение определяется лишь зарядом q_1, заключенным внутри сферы радиуса r: $4\pi r^2 D_r = q_1 = {}^4/_3 \pi r^3 \rho$, откуда

$$D_r = \frac{1}{3} \rho r, \tag{3.31}$$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{1}{3} \frac{\rho r}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}, \tag{3.32}$$

где ε_1 — относительная диэлектрическая проницаемость материала заряженного шара.

Разность потенциалов между двумя точками поля внутри шара равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon_1} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0 \varepsilon_1} \left(r_2^2 - r_1^2 \right). \tag{3.33}$$

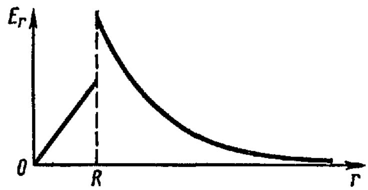

Рис. 3.13

На рис. 3.13 представлен график зависимости E_r от r для равномерно заряженного шара. При $r = R$ выражения (3.29) и (3.32) не совпадают, так как относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей заряженный шар, $\varepsilon \neq \varepsilon_1$ (рис. 3.13 соответствует случаю, когда $\varepsilon < \varepsilon_1$).

Вопросы для повторения

1. Каково условие потенциальности силового поля? Докажите, что электростатическое поле является потенциальным.
2. Дайте определение потенциала электростатического поля.
3. Как связана работа перемещения заряда в электростатическом поле с напряженностью и потенциалом поля?
4. Какова связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля?

Примеры решения задач

Задача 3.1. Внутренний цилиндрический проводник длинного прямолинейного коаксиального кабеля имеет радиус $R_1 = 2$ мм и заряжен с линейной плотностью $\tau_1 = 9{,}42 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ$_q$/см. Внешний цилиндрический проводник имеет радиус $R_2 = 4$ мм и заряжен с линейной плотностью $\tau_2 = -\tau_1$. Изоляцией между цилиндрами служит резина ($\varepsilon = 3$). Найти: значения напряженности электрического поля в точках A и B, лежащих на расстояниях $r_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м и $r_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м от оси кабеля, а также разность потенциалов между цилиндрами.