Глава VII

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 7.1. Энергия заряженного проводника и энергия электрического поля

1. Во всех выводах этого параграфа будем предполагать, что отдельные электрические заряды и заряженные тела находятся в однородной изотропной среде, не обладающей сегнетоэлектрическими свойствами.

Заряжая уединенный проводник, необходимо совершить работу против кулоновских сил отталкивания между одноименными электрическими зарядами. Эта работа идет на увеличение электрической энергии заряженного проводника, которая, таким образом, аналогична потенциальной энергии в механике.

Рассмотрим уединенный проводник, электроемкость, заряд и потенциал которого соответственно равны C, q, φ. При перенесении заряда dq из бесконечности на проводник совершается работа против сил электростатического поля

$$dA' = \varphi dq = C\varphi d\varphi.$$

Для того чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до потенциала φ, необходимо совершить работу

$$A' = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \qquad (7.1)$$

Следовательно, **энергия заряженного уединенного проводника** (ее часто называют собственной энергией заряженного проводника)

$$W_e = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varphi q}{2}. \qquad (7.2)$$

Путем аналогичных расчетов легко показать, что **энергия заряженного конденсатора**

$$W_e = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\Delta\varphi q, \qquad (7.2')$$

где C и q — электроемкость и заряд конденсатора, $\Delta\varphi$ — разность потенциалов положительно и отрицательно заряженных обкладок.

2. В общем случае свободные заряды могут быть распределены непрерывно по объему диэлектрика или вакуума и по поверхностям заряженных проводников и наэлектризованного диэлектрика. Энергия такой системы зарядов, как показывают расчеты, равна

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{S_{\text{заряж}}} \varphi\sigma dS + \frac{1}{2}\int_{V_{\text{заряж}}} \varphi\rho dV. \qquad (7.2'')$$

В этой формуле σ и ρ — поверхностная и объемная плотности свободных зарядов, φ — потенциал результирующего поля всех поверхностных и объемных зарядов в точках малого элемента заряженной поверхности dS или заряженного объема dV, а интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям $S_{\text{заряж}}$ и объемам $V_{\text{заряж}}$. Влияние диэлектрика на энергию W_e сказывается в том, что при неизменном распределении свободных зарядов значения φ в разных диэлектриках различны. Например, в однородном изотропном диэлектрике, заполняющем все поле, φ меньше, чем в вакууме, в ε раз.

Легко видеть, что из (7.2″), в частности, следуют формулы (7.2) и (7.2′). В самом деле, для уединенного заряженного проводника $\rho = 0$ и потенциал φ во всех точках поверхности проводника одинаков. Поэтому

$$W_e = \frac{1}{2} \int\limits_{S_{\text{заряж}}} \varphi\sigma dS = \frac{\varphi}{2} \int\limits_{S_{\text{заряж}}} \sigma dS = \frac{q\varphi}{2}.$$

Для конденсатора $\rho = 0$ и

$$W_e = \frac{1}{2} \int\limits_{S_{\text{заряж}}} \varphi\sigma dS = \frac{1}{2} (\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2),$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы обкладок, q_1 и q_2 — их заряды ($q_2 = -q_1$). Если первая обкладка заряжена положительно, то $q_1 = q > 0$ — заряд конденсатора и в согласии с (7.2′) его энергия

$$W_e = q(\varphi_1 - \varphi_2)/2.$$

3. В качестве примера вычислим энергию заряженного плоского конденсатора. Электроемкость такого конденсатора по формуле (5.7) равна $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$, а разность потенциалов между обкладками $\Delta\varphi = Ed$, где E — напряженность его однородного поля. Подставив в (7.2′) эти выражения для C и $\Delta\varphi$, получим

$$W_e = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 V/2, \tag{7.3}$$

где $V = Sd$ — объем поля конденсатора.

Формула (7.3) связывает энергию, затраченную на зарядку конденсатора, с основной характеристикой его электрического поля — напряженностью **E**. Формулы (7.2′) и (7.3) позволяют дать две различные трактовки энергии W_e. Исходя из (7.2′) можно утверждать, что W_e — это энергия системы зарядов на обкладках конденсатора, т.е. что носителями электрической энергии являются сами заряды. С другой стороны, основываясь на (7.3), можно утверждать, что W_e — энергия электрического поля конденсатора, т.е. что она распределена по всему объему поля, которое тем самым является ее носителем. Электростатическое поле неотделимо от его источников — неподвижных электрических зарядов. Поэтому, оставаясь в рамках электростатики, нельзя отдать предпочтение какому-либо из двух вышеприведенных утверждений относительно локализации энергии W_e.

Из курса физики средней школы известно, что электростатическое поле представляет собой простейший случай электромагнитного поля. Изучение переменных электромагнитных полей показало, что они могут существовать отдельно от породивших их систем электрических зарядов и токов, а их распространение в пространстве в виде электромагнитных волн связано с переносом энергии. Тем самым было доказано, что электромагнитное поле обладает энергией. Соответственно и электростатическое поле тоже обладает энергией, распределенной в нем с объемной плотностью w_e. Энергия W_e поля плоского конденсатора в силу однородности поля должна быть распределена равномерно по всему его объему V. Из (7.3) следует, что объемная плотность энергии электрического поля конденсатора

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2}. \tag{7.4}$$

4. *Исследования* неоднородных электрических полей, создаваемых произвольными заряженными телами, показали, что для них формула (7.3) неприменима, тогда как выражение (7.4) остается справедливым и определяет объемную плотность энергии в каждой точке любого электрического поля в изотропной среде.

Поэтому энергия бесконечно малого объема dV поля равна

$$dW_e = w_e dV = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV/2. \tag{7.5}$$

Интегрируя это уравнение по всему объему поля, находим полную энергию W_e электростатического поля:

$$W_e = \int\limits_{V_{\text{поля}}} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV. \tag{7.6}$$

Если среда анизотропна, то объемная плотность энергии электрического поля в такой среде

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{DE}. \tag{7.4'}$$

Это выражение является обобщением формулы (7.4) которая вытекает из (7.4'), так как в изотропной среде векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ совпадают по направлению.

5. Можно показать, что для электростатического поля, создаваемого произвольным заряженным телом, полная энергия поля, так же как и в случае плоского конденсатора, равна собственной энергии этого тела:

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \int\limits_{V_{\text{поля}}} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV, \tag{7.7}$$

где q, φ и C — заряд, потенциал и электроемкость тела соответственно.

Докажем справедливость выражения (7.7) на примере неоднородного электростатического поля шара радиуса R с зарядом $q > 0$, равномерно распределенным по поверхности шара.

На расстоянии r от центра заряженного шара напряженность его электростатического поля по формуле (3.29) равна

$$E = E_r = q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2).$$

Подсчитаем по формуле (7.5) энергию dW_e поля, приходящуюся на бесконечно тонкий шаровой слой, заключенный между сферами с радиусами r и $r + dr$ (рис. 7.1). Объем такого слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Подставим значения E и dV в формулу (7.5):

$$dW_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{dr}{r^2}.$$

Полная энергия поля заряженного шара равна

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Если учесть, что электроемкость заряженного шара определяется формулой (5.5) $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$, то энергия его электростатического поля

$$W_e = q^2/2C,$$

т.е. равна его собственной энергии (7.2).

6. Соотношение (7.7) можно обобщить на электростатическое поле, создаваемое произвольной системой зарядов. Полная энергия такой системы (например, любой системы заряженных проводников), выражаемая формулой (7.2″), совпадает с полной энергией электростатического поля этой системы зарядов:

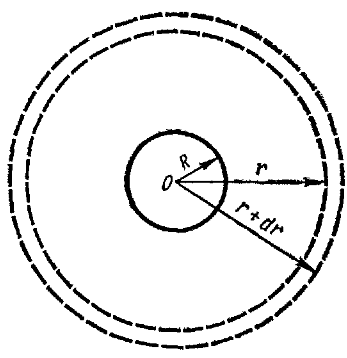

Рис. 7.1

$$\frac{1}{2}\int\limits_{S_{\text{заряж}}} \varphi\sigma dS + \frac{1}{2}\int\limits_{V_{\text{заряж}}} \varphi\rho dV = \int\limits_{V_{\text{поля}}} w_e dV. \qquad (7.7')$$

§ 7.2. Энергия поляризованного диэлектрика

1. Предположим, что однородный изотропный диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле. При этом диэлектрик поляризуется. Процесс поляризации, как электронной, так и ориентационной, связан с работой по деформации электронных орбит в атомах и молекулах и по повороту осей молекул-диполей вдоль поля. Очевидно, что поляризованный диэлектрик должен обладать запасом электрической энергии.

В предыдущем параграфе было найдено выражение для объемной плотности энергии электрического поля в веществе с относительной диэлектрической проницаемостью ε. Если поле напряженностью E