

На расстоянии r от центра заряженного шара напряженность его электростатического поля по формуле (3.29) равна

$$E = E_r = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon r^2).$$

Подсчитаем по формуле (7.5) энергию dW_e поля, приходящуюся на бесконечно тонкий шаровой слой, заключенный между сферами с радиусами r и $r + dr$ (рис. 7.1). Объем такого слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Подставим значения E и dV в формулу (7.5):

$$dW_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dr}{r^2}.$$

Полная энергия поля заряженного шара равна

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon R}.$$

Если учесть, что емкость заряженного шара определяется формулой (5.5) $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$, то энергия его электростатического поля

$$W_e = q^2/2C,$$

т.е. равна его собственной энергии (7.2).

6. Соотношение (7.7) можно обобщить на электростатическое поле, создаваемое произвольной системой зарядов. Полная энергия такой системы (например, любой системы заряженных проводников), выражаемая формулой (7.2'), совпадает с полной энергией электростатического поля этой системы зарядов:

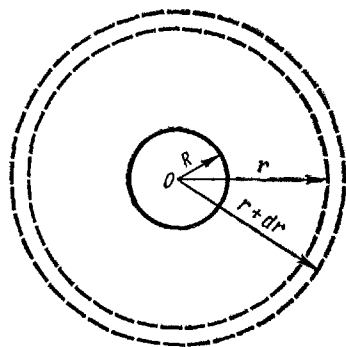


Рис. 7.1

$$\frac{1}{2} \int_{S_{\text{заряж}}} \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int_{V_{\text{заряж}}} \varphi \rho dV = \int_{V_{\text{поля}}} w_e dV. \quad (7.7')$$

§ 7.2. Энергия поляризованного диэлектрика

1. Предположим, что однородный изотропный диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле. При этом диэлектрик поляризуется. Процесс поляризации, как электронной, так и ориентационной, связан с работой по деформации электронных орбит в атомах и молекулах и по повороту осей молекул-диполей вдоль поля. Очевидно, что поляризованный диэлектрик должен обладать запасом электрической энергии.

В предыдущем параграфе было найдено выражение для объемной плотности энергии электрического поля в веществе с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Если поле напряженностью E

создано в вакууме ($\epsilon = 1$), то объемная плотность энергии этого поля в точке с напряженностью E по формуле (7.4) равна

$$\omega_e (\text{вак}) = \epsilon_0 E^2 / 2. \quad (7.8)$$

2. Докажем, что объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика в той точке, где напряженность поля равна E , выражается формулой

$$\omega_e (\text{диэл}) = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E^2 / 2. \quad (7.9)$$

Рассмотрим диэлектрик с неполярными молекулами (упругими диполями). По формуле (6.2) электрический момент упругого диполя, находящегося в поле с напряженностью E , равен

$$p_e = \epsilon_0 \alpha E, \text{ или } p_e = ql = \epsilon_0 \alpha E, \quad (7.10)$$

где α — поляризуемость диполя, q и l — соответственно его заряд и длина (плечо). На заряд q со стороны поля действует сила qE , которая при увеличении длины диполя на dl совершает работу $dA = qEdl$. Из формулы (7.10) следует, что $dl = \epsilon_0 \alpha dE / q$, поэтому

$$dA = \epsilon_0 \alpha E dE.$$

Интегрируя это выражение по E от 0 до E , найдем работу A электрического поля при деформации одного упругого диполя:

$$A = \frac{\epsilon_0 \alpha E^2}{2} = \frac{p_e E}{2}. \quad (7.11)$$

Работа A равна той потенциальной энергии, которой обладает упругий диполь в электрическом поле с напряженностью E . Если в единице объема диэлектрика содержится n_0 диполей, то потенциальная энергия всех этих диполей, т.е. объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика, будет

$$\omega_e (\text{диэл}) = n_0 A = n_0 p_e E / 2. \quad (7.12)$$

Поскольку $n_0 p_e = P_e$ — модуль вектора поляризации, имеем

$$\omega_e (\text{диэл}) = P_e E / 2. \quad (7.12')$$

Учтя, что по формуле (6.6) $P_e = \epsilon_0 \chi E$ и $\chi = \epsilon - 1$ [см. формулу (6.18)], получим

$$\omega_e (\text{диэл}) = \frac{\epsilon_0 \chi E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) E^2}{2},$$

т.е. объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика с неполярными молекулами (упругими диполями) выражается формулой (7.9).

Можно показать, что точно такой же результат получается и для диэлектрика с полярными молекулами (жесткими диполями).

Из формул (7.8), (7.9) и (7.4) следует, что

$$\omega_e (\text{вак}) + \omega_e (\text{диэл}) = \omega_e.$$