$$\langle v \rangle \approx \frac{11 \cdot 10^6}{8{,}5 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 8 \cdot 10^{-4} \ \text{м/с}.$$

Таким образом, средняя скорость упорядоченного движения электронов, соответствующая электрическому току в проводнике, чрезвычайно мала по равнению со средней скоростью их теплового движения при обычных температурах. Незначительная средняя скорость $\langle v \rangle$ объясняется весьма частыми столкновениями электронов с ионами кристаллической решетки.

5 Как согласовать очень малую скорость $\langle v \rangle$ электронов с практически мгновенной передачей электрических, например телеграфных, сигналов на очень большие расстояния?

Замыкание электрической цепи на станции отправления влечет за собой распространение электрического поля в проводах и вокруг них Всякое изменение электрического поля передается вдоль проводов с огромной скоростью c, равной $3 \cdot 10^8$ м/с (скорость света). Таким образом, спустя время $t = L/c$, где L — длина провода, вдоль цепи установится стационарное поле и в ней начнется упорядоченное движение электронов проводимости. Если $L = 1000$ м, то $t = 0{,}3 \times \times 10^{-}$ с. Поэтому движение электронов под действием внешнего электрического поля возникает на всем протяжении провода практически одновременно с подачей сигнала.

§ 8.5. Вывод законов Ома и Джоуля—Ленца в классической электронной теории

1. Важнейшей задачей классической электронной теории проводимости металлов является теоретический вывод основных законов электрического тока — законов Ома и Джоуля—Ленца, установленных опытным путем. Приведем вывод этих законов.

Предположим, что при соударениях с узлами кристаллической решетки электроны полностью теряют скорость упорядоченного движения, которую они приобретают под действием внешнего электрического поля за время τ свободного пробега В процессе свободного пробега электроны движутся равноускоренно Поэтому средняя скорость $\langle v \rangle$ их упорядоченного движения

$$\langle v \rangle = \langle v_{\text{макс}} \rangle / 2,$$

где $\langle v_{\text{макс}} \rangle$ — среднее значение скорости, приобретаемой электроном под действием поля за время свободного пробега.

Пусть m — масса электрона, e — абсолютное значение его заряда и $\mathbf{E}$ — напряженность стационарного электрического поля в проводнике Тогда уравнение движения электрона имеет следующий вид:

$$m \, (dv/dt) = eE$$

Интегрируя это уравнение по v от 0 до $\langle v_{\text{макс}} \rangle$ и по t от 0 до $\langle \tau \rangle$ ($\langle \tau \rangle$ — средняя продолжительность свободного пробега электрона), получаем

$$\langle v_{\text{макс}} \rangle = \frac{eE}{m} \langle \tau \rangle \text{ и } \langle v \rangle = \frac{eE}{2m} \langle \tau \rangle. \qquad (8.9)$$

Электроны проводимости одновременно участвуют также в тепловом движении. Если $\mathbf{v}$ — скорость электрона в упорядоченном движении, $\mathbf{u}$ — его скорость в тепловом движении, то результирующая скорость электрона $\mathbf{v}_э = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ Будем считать, как это делал Друде, что абсолютные значения скоростей $\mathbf{u}$ всех электронов одинаковы и равны u. Среднее время $\langle \tau \rangle$ свободного пробега электрона связано со средней длиной свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ и редним значением модуля его скорости $\langle v_э \rangle$ очевидным соотношением

$$\langle \tau \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v_э \rangle} = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \, | \mathbf{v} + \mathbf{u} | \, \rangle}.$$

Выше было показано, что средняя скорость упорядоченного движения электронов во много раз меньше скорости их теплового движения. Поэтому в предыдущей формуле можно пренебречь величиной $\mathbf{v}$ по сравнению с $\mathbf{u}$:

$$\langle \tau \rangle = \langle \lambda \rangle / u.$$

Подставим это значение $\langle \tau \rangle$ во вторую формулу (8.9):

$$\langle v \rangle = e \langle \lambda \rangle E / 2mu. \qquad (8.9')$$

Заменим в (8.8) $\langle v \rangle$ его выражением (8.9′):

$$j = (n_0 e^2 \langle \lambda \rangle / 2mu) E. \qquad (8.10)$$

Величину

$$\gamma = n_0 e^2 \langle \lambda \rangle / 2mu \qquad (8.11)$$

называют **удельной электрической проводимостью**, а обратную ей величину $\rho = 1/\gamma$ — **удельным электрическим сопротивлением** проводника. Следовательно,

$$j = (1/\rho) E = \gamma E. \qquad (8.12)$$

Формула (8.12) выражает **закон Ома для плотности тока:** *плотность тока в проводнике равна произведению удельной проводимости проводника на напряженность электрического поля.*

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ имеют одинаковое направление. Поэтому закон Ома можно записать также в векторной форме:

$$\mathbf{j} = (1/\rho) \mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}. \qquad (8.12')$$

2. Рассмотрим превращение энергии, происходящее при соударениях электронов проводимости с узлами кристаллической решетки. В конце свободного пробега каждый электрон теряет скорость упорядоченного движения, приобретенную им под действием электрического поля за время свободного пробега. При этом энергия упорядоченного движения электронов преобразуется во внутреннюю энергию проводника, нагревающегося в процессе прохождения по нему электрического

тока. Средняя энергия, приобретаемая электроном под действием поля на длине свободного пробега и преобразующаяся во внутреннюю энергию при столкновении электрона с ионом металла,

$$\langle \Delta W_э \rangle = m \langle v^2_{макс} \rangle /2.$$

В самом деле

$$\Delta W_э = \frac{m}{2} (\mathbf{u} + \mathbf{v}_{макс})^2 - \frac{mu^2}{2},$$

где $\mathbf{u}$ — скорость теплового движения электрона в начале свободного пробега, $\mathbf{v}_{макс}$ — скорость, сообщенная электрону электрическим полем. Поскольку

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}_{макс})^2 = u^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{макс}) + v^2_{макс},$$

то

$$\Delta W_э = m(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{макс}) + mv^2_{макс}/2.$$

Среднее значение энергии $\Delta W_э$ равно

$$\langle \Delta W_э \rangle = m \langle v^2_{макс} \rangle /2,$$

так как в силу хаотичности теплового движения $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ и

$$\langle (\mathbf{u}, \mathbf{v}_{макс}) \rangle = (\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{v}_{макс} \rangle) = 0.$$

Пренебрегая различием между $\langle v^2_{макс} \rangle$ и $\langle v_{макс} \rangle^2$, будем в дальнейшем считать, что

$$\langle \Delta W_э \rangle = m \langle v_{макс} \rangle^2 /2. \qquad (8.13)$$

В единице объема проводника имеется n_0 электронов проводимости, каждый из которых испытывает в среднем $u/\langle \lambda \rangle$ столкновений с ионами — узлами кристаллической решетки.

Следовательно, энергия тока, преобразующаяся во внутреннюю в единице объема проводника за единицу времени, равна

$$w = n_0 \frac{u}{\langle \lambda \rangle} \frac{m}{2} \langle v_{макс} \rangle^2. \qquad (8.14)$$

Величину w называют **объемной плотностью тепловой мощности тока**. Заменяя $\langle v_{макс} \rangle$ по формуле (8.9), где $\langle \tau \rangle = \langle \lambda \rangle / u$, получаем

$$w = (n_0 e^2 \langle \lambda \rangle / 2mu) E^2. \qquad (8.15)$$

Коэффициент, стоящий при E^2, есть не что иное, как удельная электрическая проводимость γ металла. Поэтому

$$w = \gamma E^2 = (1/\rho) E^2. \qquad (8.16)$$

Формула (8.16) представляет математическое выражение **закона Джоуля — Ленца для плотности тепловой мощности тока:** *объемная плотность тепловой мощности тока в проводнике равна произведению его удельной электрической проводимости на квадрат напряженности электрического поля.*

Формулу (8.16) можно записать в несколько ином виде, если учесть, что $E^2 = \mathbf{E}\mathbf{E}$. Заменив один из векторов $\mathbf{E}$ на $\rho\mathbf{j}$ по формуле (8.12′), получим: $E^2 = \mathbf{E}\rho\mathbf{j} = \rho\mathbf{E}\,\mathbf{j}$ и

$$w = \mathbf{E}\mathbf{j}. \tag{8.16′}$$

3. В приведенных выше выводах законов Ома и Джоуля — Ленца мы предполагали, что при соударениях электронов с узлами кристаллической решетки электроны полностью теряют скорость упорядоченного движения. Г. Лоренц показал, что это предположение несущественно. К тем же результатам можно прийти, считая, что соударения электронов с узлами решетки являются абсолютно упругими.

§ 8.6. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов

1. В 1853 г. Г. Видеман и Р. Франц на основе экспериментов установили, что *для всех металлов при одной и той же температуре отношение коэффициента теплопроводности K к удельной электрической проводимости γ одинаково* (**закон Видемана—Франца**):

$$(K/\gamma) = C. \tag{8.17}$$

Дальнейшие исследования Л. Лоренца показали, что отношение K/γ для металлов прямо пропорционально их абсолютной температуре:

$$(K/\gamma) = C_1 T. \tag{8.17′}$$

2. Электронная теория проводимости металлов позволила получить этот закон и найти значение константы C_1. В § 15.3 первого тома курса говорилось, что теплопроводность металлов в основном осуществляется за счет движения электронов проводимости. Электронный газ в металле подобен одноатомному идеальному газу. Поэтому коэффициент теплопроводности металлов, как показано в том же параграфе, равен

$$K = \frac{1}{2} k n_0 \langle\lambda\rangle \langle u\rangle, \tag{8.18}$$

где k — постоянная Больцмана, n_0 — концентрация электронов проводимости, а $\langle\lambda\rangle$ и $\langle u\rangle$— их средняя длина свободного пробега и средняя скорость теплового движения.

3. В теории Друде $\langle u\rangle = v_{\text{кв}} = u$. Поэтому из формул (8.18) и (8.11) следует, что

$$\frac{K}{\gamma} = \frac{k}{e^2} m u^2.$$

Поскольку $\dfrac{mu^2}{2} = \dfrac{m v_{\text{кв}}^2}{2} = \dfrac{3}{2} kT$, то

$$\frac{K}{\gamma} = 3\frac{k^2}{e^2} T. \tag{8.19}$$